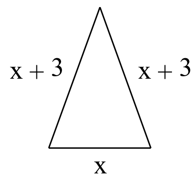
فارابی

بارم		
	در یک مثلث متساوی‌الساقین، طول هر یک از دو ساق از قاعده‌ی مثلث ۳ واحد بیشتر است؛ رابطه‌ای که محیط این مثلث را برحسب تابعی از طول قاعده‌ی آن بیان می‌کند بنویسید.	۱

در یک مثلث متساوی‌الساقین، طول هر یک از دو ساق از قاعده‌ی مثلث ۳ واحد بیشتر است؛ رابطه‌ای که محیط این مثلث را برحسب تابعی از طول قاعده‌ی آن بیان می‌کند بنویسید.

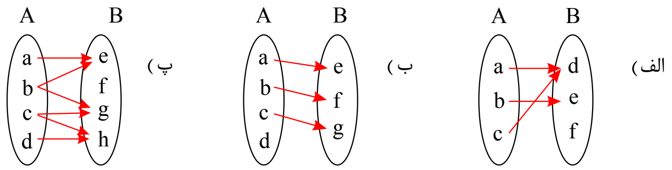
باتوجه به شکل قابل داریم:



$P = x + ۳ + x + ۳ + x = ۳x + ۶$

$\boxed{P = ۳x + ۶}$

۲ باتوجه به تعریف تابع، کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر تابع از A به B نیست چرا؟



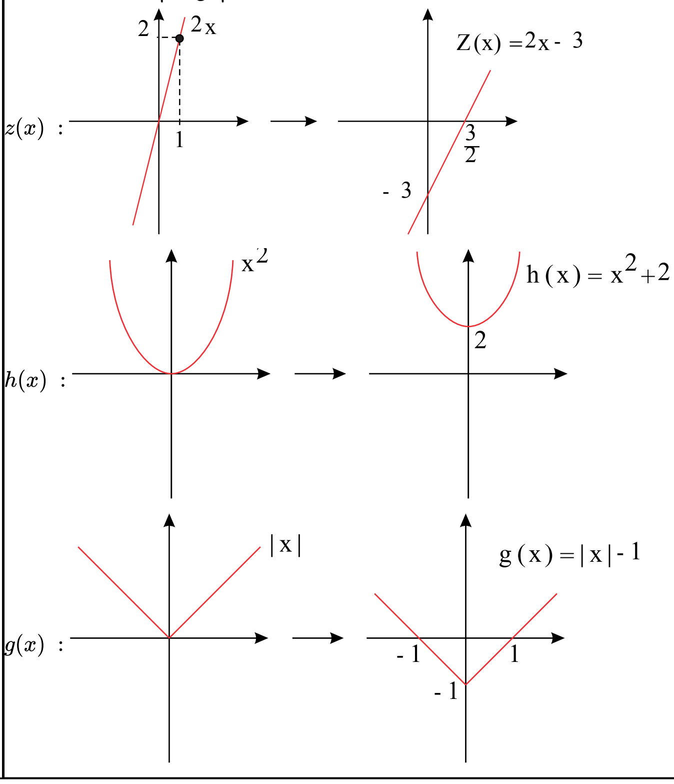
پاسخ: الف) تابع است؛ زیرا طبق تعریف از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده: دقت کنید در تابع بودن یا نبودن، ورود پیکان به اعضای B، هیچ تأثیری ندارد، برای مثال ممکن است به یکی از اعضاء B، یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا ممکن است اصلاً پیکانی وارد نشود که در هر سه حالت گفته شده، نمودار پیکانی مورد نظر، می‌تواند تابع باشد یا نباشد و ارتباطی به B ندارد.

ب) تابع نیست؛ زیرا از d پیکانی خارج نشده و طبق تعریف، یک تابع از A به B رابطه‌ای بین A و B است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت داده شود.

پ) تابع نیست؛ چون از دو عضو b و c بیش از یک پیکان خارج شده و طبق تعریف، یک تابع از A به B رابطه‌ای بین A و B است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت داده شود.

۳ توابع $z(x) = ۲x - ۳$ و $h(x) = x^۲ + ۲$ و $g(x) = |x| - ۱$ را به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ: ابتدا توابع $۲x$، $x^۲$ و $|x|$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار کلی $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه‌ی k واحد در امتداد محور yها رسم می‌کنیم.



فارابی

	بارم
۴ **تابع بودن یا نبودن مجموعه زوج مرتب‌های زیر را بررسی کنید.**	

الف) $f(x)=\{(۱,۲)(۲,۳)(۳,۴)(۴,۵)\}$ **پ)** $h(x)=\{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۱,۱)(۲,۲)\}$

ب) $g(x)=\{(۱,۲)(۱,۳)(۲,۲)(۳,۳)\}$ **ت)** $z(x)=\{(۱,۱)(۲,۱)(۳,۱)(۴,۱)\}$

پاسخ: **الف) تابع است: مؤلفه‌های اول تمام زوج مرتب‌ها با هم متفاوت است.**

ب) تابع نیست: وجود دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,۳)$، دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت را نشان می‌دهد که رابطه را از تابع بودن خارج می‌کند.

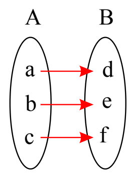
پ) تابع است: دقت کنید زوج مرتب $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ تنها دو بار نوشته شده‌اند.

ت) تابع است: دقت کنید مولفه‌ی دوم زوج مرتب‌ها، تأثیری در تابع بودن یا نبودن رابطه ندارد.

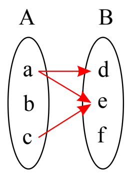
---

۵ **رابطه‌های زیر را به صورت زوج مرتب نوشته و مشخص کنید آیا نمایش زوج مرتبی آنها نمایانگر یک تابع است یا خیر؟** بارم

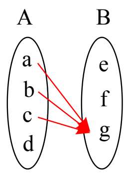
الف)



ب)



پ)



الف) $\{(a,d),(b,e),(c,f)\}$ **تابع است**

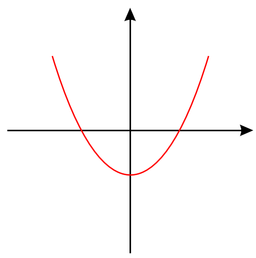
ب) $\{(a,d),(a,e),(c,e)\}$ **تابع نیست**

پ) $\{(a,g),(b,g),(c,g)\}$ **تابع نیست**

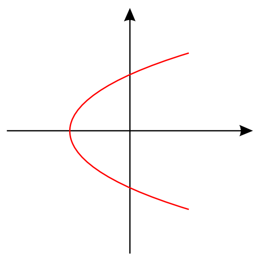
---

۶ **کدام یک از نمودارهای زیر نمایانگر تابع است؟** بارم

الف)

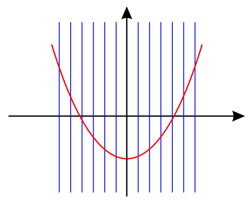


ب)

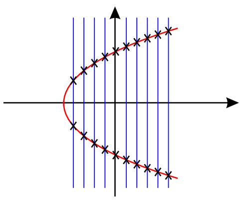


پاسخ: **باتوجه به تعریف، برای اینکه یک نمودار، تابع باشد باید به ازای هر x، فقط و فقط یک y موجود باشد یا به عبارت دیگر، خطوط موازی با محور yها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکنند.**

الف) تابع است :



ب) تابع نیست :



---

۷ **b و a را طوری تعیین کنید که روابط زیر تابع باشند.** بارم

الف) $f(x)=\left\{(۳,۲a-b),(\frac{۶}{۲},۲a+b),(۱,a),(۲,۳),(\frac{۲}{۱},\frac{۳}{a})\right\}$

ب) $g(x)=\{(a,a),(b,a),(۲a-b,۰),(b,۲a-b),(a,۲b)\}$

پاسخ: **برای اینکه یک رابطه که به صورت زوج مرتب نوشته شده است تابع باشد، باید مؤلفه‌های اول یکسان، مؤلفه‌های دوم یکسان نیز داشته باشند، در واقع زوج مرتب تکراری باشد پس:**

الف) $\begin{cases}(۳,۲a-b)\\(\frac{۶}{۲},۲a+b)\end{cases}\Rightarrow ۲a-b=۲a+b\Rightarrow b=۰$ $\quad\begin{cases}(۲,۳)\\(\frac{۲}{۱},\frac{۳}{a})\end{cases}\Rightarrow \frac{۳}{a}=۳\Rightarrow a=۱$

ب) $\begin{cases}(b,a)\\(b,۲a-b)\end{cases} \Rightarrow a=۲a-b \Rightarrow a=b \ \ (I) \qquad \begin{cases}(a,a)\\(a,۲b)\end{cases} \Rightarrow a=۲b \Rightarrow a=b=۲b \ \ (II)$

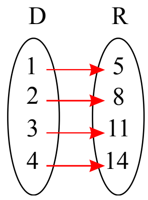
$\xrightarrow{I\,,II} a=b=۲b \Rightarrow \begin{matrix}a=۰\\b=۰\end{matrix}$

۸		بارم

۸. **تابع f با نمایش جبری $f(x)=۳x+۲$ و دامنه‌ی $D=\{۱,۲,۳,۴\}$ در دست است. با تعیین برد، نمودار پیکانی این تابع را رسم نمائید.**

پاسخ: با قرار دادن تک تک اعضاء دامنه در ضابطه، برد بدست می‌آید.

$$f(x)=۳x+۲ \begin{cases} \xrightarrow{x=۱} f(۱)=۵ \\ \xrightarrow{x=۲} f(۲)=۸ \\ \xrightarrow{x=۳} f(۳)=۱۱ \\ \xrightarrow{x=۴} f(۴)=۱۴ \end{cases} \Rightarrow \text{برد } R=\{۵,۸,۱۱,۱۴\}$$



بارم

۹. **در دو تابع $(x\in\mathbb{N}) \quad f(x)=۲x+۱$ و $(x\in\mathbb{Z}) \quad g(x)=۲x-۱$؛ دامنه و برد هر یک را تعیین کنید و مشخص کنید اگر $f(۴)=g(x)$ باشد، آنگاه x کدام است؟**

پاسخ: دامنه‌ی تابع f از آنجا که $x\in\mathbb{N}$ است برابر می‌شود با تمام اعداد طبیعی $D_f=\{۱,۲,۳,۴,\cdots\}$ و برد آن باتوجه به $f(۱)=۳$ ، $f(۲)=۵$ ، $f(۳)=۷$ و.... مجموعه اعداد فرد طبیعی بزرگتر از ۲ است:

$R_f=\{۳,۵,۷,۹,\cdots\}$

دامنه‌ی تابع g از آنجا که $x\in\mathbb{Z}$ است برابر می‌شود با مجموعه اعداد صحیح:

$D_y=\{\cdots,-۱,۰,۱,\cdots\}$

و با توجه به $g(۲)=۳$ $g(۱)=۱$، $g(۰)=-۱$، $g(-۱)=-۳$ برد آن مجموعه اعداد فرد می‌شود:

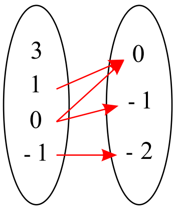
$R_g=\{-۳,-۱,۱,۳,\cdots\}$

$f(۴)=۲\times۴+۱=۸+۱=۹=g(x)=۲x-۱\Rightarrow ۲x=۱۰\Rightarrow x=۵$

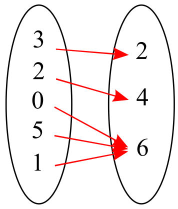
فارابی

۱۰	تابع بودن یا نبودن موارد زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید و در توابع، دامنه و برد را بنویسید.	بارم

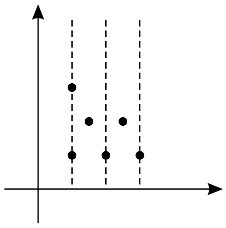
الف)



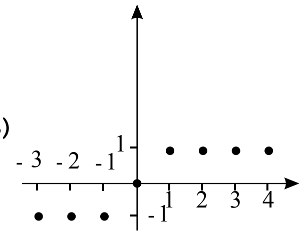
ب)



ج)



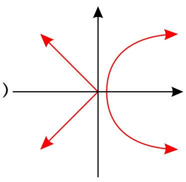
د)



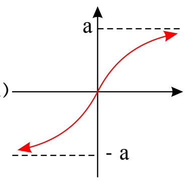
و) $\{(۱,۱)(۲,۱)(۳,۲)(۴,۱)\}$

هـ) $\{(۱,۲)(۱,۳)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۱)\}$

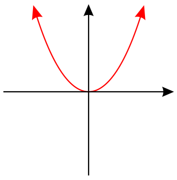
خ)



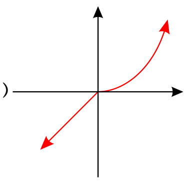
ح)



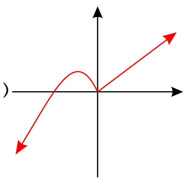
چ)



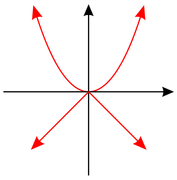
ر)



ذ)



د)



پاسخ: الف) تابع نیست: ۱- از ۳ هیچ فلشی خارج نشده ۲- از صفر دو فلش خارج شده

ب) تابع است. برد $= \{۲,۴,۶\}$ دامنه $= \{۳,۲,۰,۵,۱\}$

ج) تابع نیست: خطوط موازی محور y بیش از یک نقطه را روی نمودار قطع می‌کنند که نشان‌دهنده‌ی این است که به ازای یک x، بیش از یک y داریم.

د) تابع است. برد $= \{-۱,۰,۱\}$ دامنه $= \{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$

هـ) تابع نیست: برخی زوج مرتب‌ها مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متفاوت دارند.

و) تابع است. برد $= \{۱,۲\}$ دامنه $= \{۱,۲,۳,۴\}$

ز) تابع است. برد $= \mathbb{R}^+$ یا $[۰,+\infty)$ دامنه $= \mathbb{R}$

ح) تابع است. برد $= (-a,a)$ دامنه $= \mathbb{R}$

ط) تابع نیست: خطوط موازی محور y نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

ی) تابع نیست: خطوط موازی محور y نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

ک) تابع است. دامنه $=$ برد $= \mathbb{R}$

ل) تابع است. دامنه $=$ برد $= \mathbb{R}$

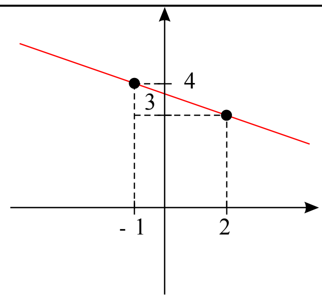
۱۱	در یک تابع خطی $f(۲) = ۳$ و $f(-۱) = ۴$ است؛ نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.	بارم

پاسخ: فرم کلی تابع خطی به شکل $y = ax + b$ است؛ باتوجه به سؤال داریم:

$$\begin{cases} f(-1)=4 \\ f(2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=-a+b \\ 3=2a+b \end{cases} \Rightarrow 4=\frac{1}{3}+b \Rightarrow b=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$

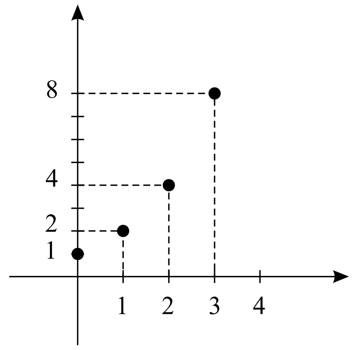
$$1=-3a \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$$



۱۲ با فرض $g(0)=1\ ,\ g(1)=2\ ,\ g(2)=4\ ,\ g(3)=8$ ، تابع $g(x)$ را به شکل مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بنویسید و نمودار آنرا رسم کنید و مشخص کنید آیا تابع $g(x)$ خطی است یا خیر. | بارم

$$g(x)=\{(0,1),(1,2),(2,4),(3,8)\}$$



تابع $g(x)$ خطی نیست چرا که در معادله $y=ax+b$ صدق نمی‌کند و در حقیقت نقاط روی یک خط واحد قرار ندارند.

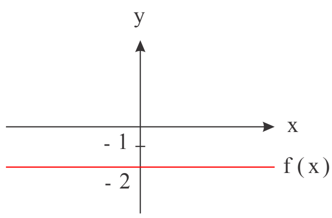
۱۳ با رسم تابع $f(x)=-2$ و محاسبه مقادیر $f(-1), f(2), f(7), f(-9)$ | بارم

الف) اگر دامنه‌ی این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشند نمودار آنرا رسم کنید.

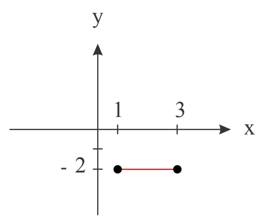
ب) اگر دامنه‌ی این تابع بازه $[1,3]$ باشد نمودار آنرارسم کنید.

$$f(x)=-2 \begin{cases} f(-1)=-2 \\ f(2)=-2 \\ f(7)=-2 \\ f(-9)=-2 \end{cases}$$

الف)

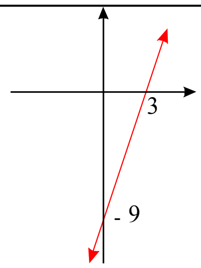


ب)



۱۴ یک تابع خطی به صورت $f(x)=3x-b$ از نقطه‌ی $(2,-3)$ عبور می‌کند؛ b را بدست آورید و تابع را رسم کنید. | بارم

پاسخ: با جایگذاری نقطه‌ی مورد نظر در ضابطه تابع داریم:



$$f(x)=۳x-b \xrightarrow{(۲,-۳)} f(۲)=۳(۲)-b$$

$$\Rightarrow -۳=۶-b \Rightarrow -b=-۹ \Rightarrow b=۹ \qquad \boxed{f(x)=۳x-۹}$$

۱۵	با فرض دو تابع $f(x)=\frac{x}{۲}-۱$ و $g(x)=۳x+۲$ حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.	بارم

الف) $f(g(-۲))$ ب) $f(۳g(\frac{-۲}{۳}))$

ج) $g(f(-۲))$ د) $\frac{g(۳f(-۲))}{-۸}$

الف) $g(-۲)=۳(-۲)+۲=-۶+۲=-۴$

$f\left(g(-۲)\right)=f(-۴)=\frac{-۴}{۲}-۱=-۲-۱=-۳$

ب) $g(\frac{-۲}{۳})=۳(\frac{-۲}{۳})+۲=-۲+۲=۰$

$۳g(\frac{-۲}{۳})=۳\times ۰=۰$

$f\left(۳g(\frac{-۲}{۳})\right)=f(۰)=\frac{۰}{۲}-۱=۰-۱=-۱$

ج) $f(-۲)=\frac{-۲}{۲}-۱=-۱-۱=-۲$

$g\left(f(-۲)\right)=g(-۲)=۳(-۲)+۲=-۶+۲=-۴$

د) $f(-۲)=\frac{-۲}{۲}-۱=-۱-۱=-۲$

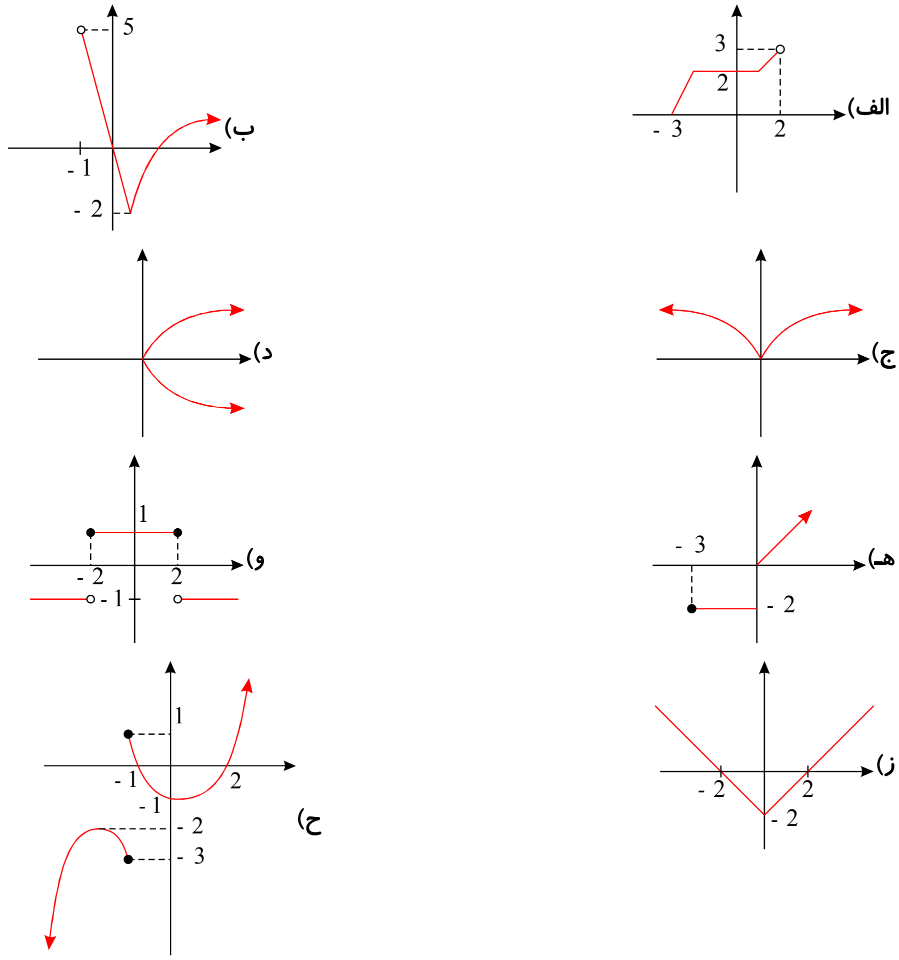
$۳f(-۲)=۳(-۲)=-۶$

$g(۳f(-۲))=g(-۶)=۳(-۶)+۲=-۱۸+۲=-۱۶$

$\frac{g(۳f(-۲))}{-۸}=\frac{-۱۶}{-۸}=۲$

۱۶	بارم

دامنه و برد نمودارهایی که نمایانگر یک تابع هستند را بنویسید.



پاسخ: الف) تابع است. برد $= [0,3)$ دامنه $= [-3,2)$

ب) تابع است. برد $= [-2,5)$ دامنه $= [-1,+\infty)$

ج) تابع است. برد $= [0,+\infty)$ دامنه $= \mathbb{R}$

د) تابع نیست: خطوط موازی محور yها، تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

هـ) تابع نیست: دقت کنید به دو نقطهٔ $(0,0)$ و $(0,-2)$

و) تابع است. برد $= [-1,1]$ دامنه $= \mathbb{R}$

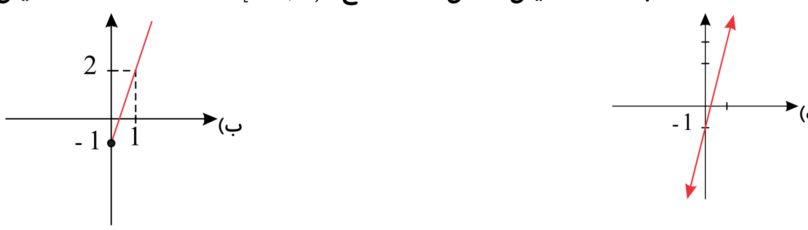
ز) تابع است. برد $= [-2,+\infty)$ دامنه $= \mathbb{R}$

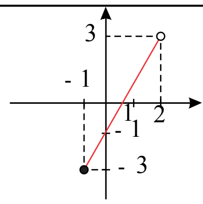
ح) تابع نیست: دقت کنید به دو نقطهٔ $(-1,1)$ و $(-1,-3)$

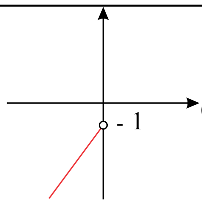
۱۷	بارم

تابع $f(x) = 2x - 1$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

الف) $\mathbb{R}$ ب) اعداد حقیقی نامنفی ج) $[-1,2)$ د) اعداد حقیقی منفی



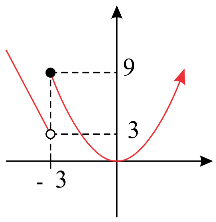
ج) 

د) 

بارم		
	تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x\geq -3 \\ \lvert x\rvert & x<-3 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آنرا مشخص کنید.	۱۸

$\mathbb{R} =$ دامنه

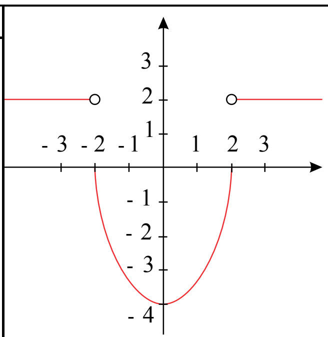
$[0,+\infty) =$ برد



می‌دانیم که تابع $f(x)=|x|$ در xهای منفی به شکل تابع $f(x)=-x$ در می‌آید.

$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x\leq 0 \end{cases}$

بارم		
	باتوجه به شکل زیر، ضابطه، دامنه و برد تابع را بدست آورید.	۱۹



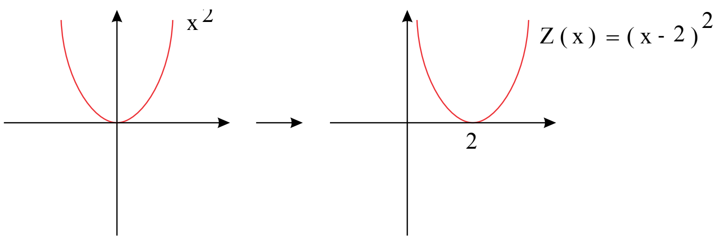
$\mathbb{R} =$ دامنه

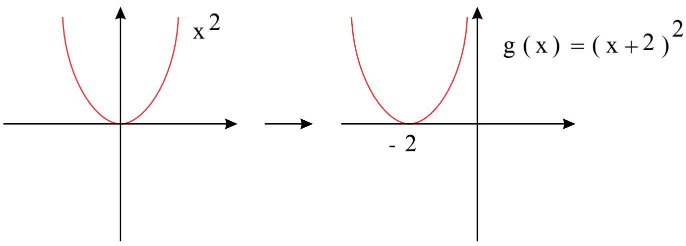
$[-4,0]\cup\{2\} =$ برد

$f(x)=\begin{cases} x^{2}-4 & -2\leq x\leq 2 \\ 2 & x<-2 \text{ یا } x>2 \end{cases}$

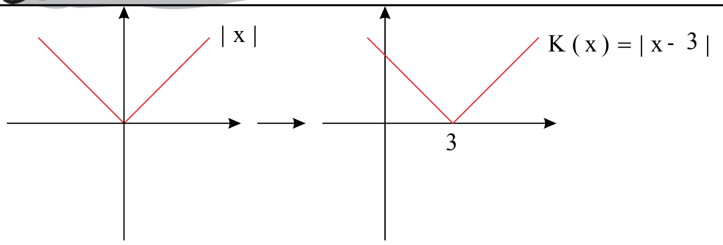
بارم		
	توابع $z(x)=(x-2)^{2}$ و $g(x)=(x+2)^{2}$ و $k(x)=\lvert x-3\rvert$ و $m(x)=\lvert x+3\rvert$ را به کمک انتقال رسم کنید.	۲۰

پاسخ: برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافیست تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم که اگر $k>0$ باشد انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

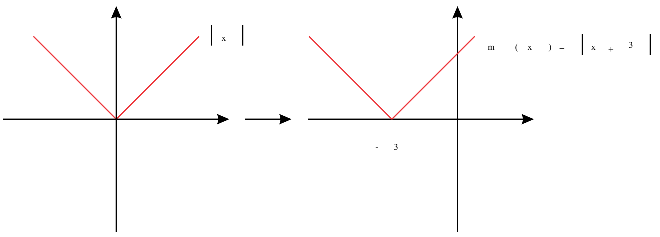
$z(x)$: 

$g(x)$: 

$k(x):$



$m(x):$

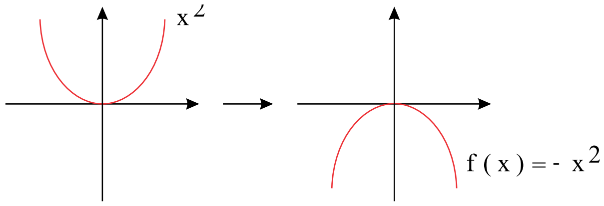


بارم

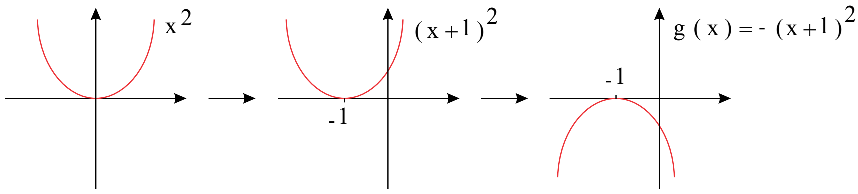
۲۱ **نمودار توابع $f(x)=-x^2$ ، $g(x)=-(x+1)^2$ ، $z(x)=-|x|$ و $h(x)=-|x+1|$ را به کمک انتقال رسم کنید.**

پاسخ: ابتدا این نکته را در نظر می‌گیریم که ترتیب اولویت در رسم توابع به این شکل است: ابتدا انتقال‌های افقی (داخل پرانتز / قدر مطلق) سپس قرینه کردن (در صورت وجود منفی پشت قدر مطلق / پرانتز) و در نهایت انتقال عمودی.

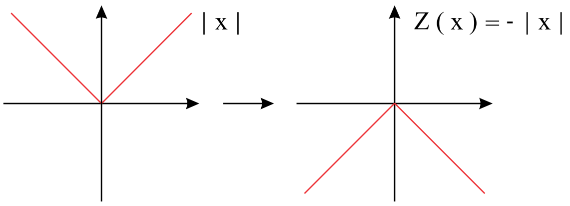
$f(x):$



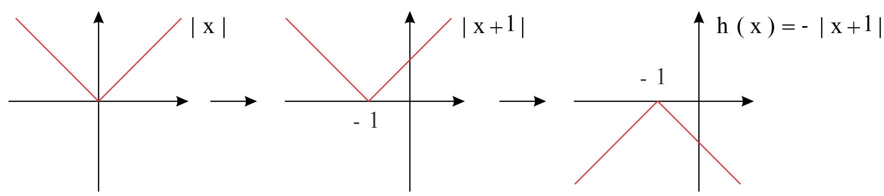
$g(x):$



$z(x):$



$h(x):$



بارم

۲۲ **نمودار توابع زیر را با استفاده از انتقال رسم کنید.**

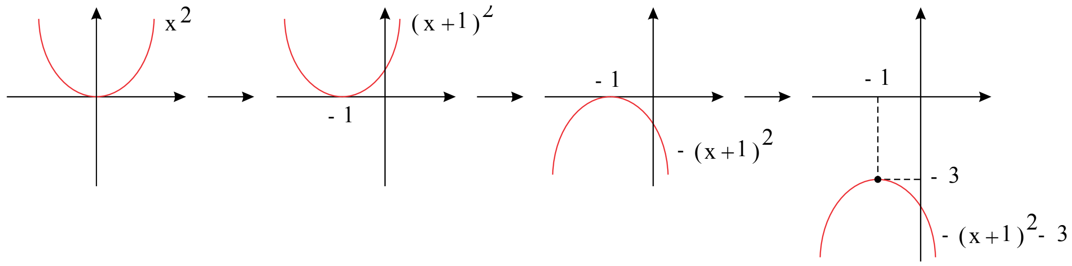
$$g(x)=|x-3|+3 \qquad f(x)=-(x+1)^2-3$$

$$z(x)=\begin{cases}-3x+2 & x>1\\ -1 & -1\leq x\leq 1\\ 3x+2 & x<-1\end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases}-|x+3|-3 & x<0\\ 0 & x=0\\ (x-1)^2+3 & x>0\end{cases}$$

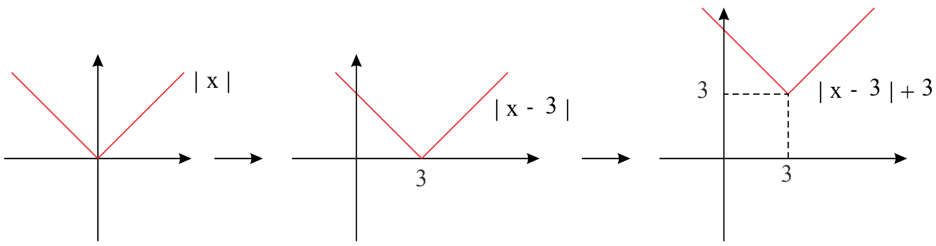
پاسخ: با در نظر گرفتن ترتیب زیر در رسم توابع به روش انتقال به رسم هر یک از توابع داده شده می‌پردازیم و برای توابع چند ضابطه‌ای نیز هر یک از ضابطه‌ها را به روش مشابه در دامنه‌ی داده شده رسم می‌کنیم:

۱- انتقال افقی   ۲- قرینه کردن   ۳- انتقال عمودی

$f(x)$:

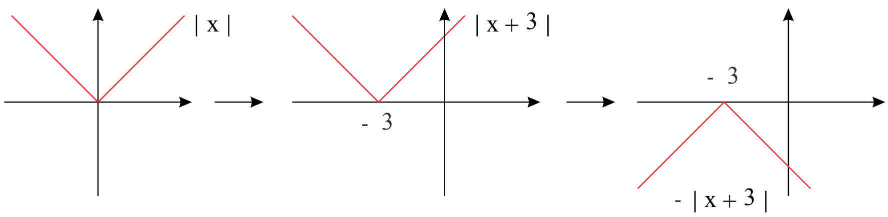


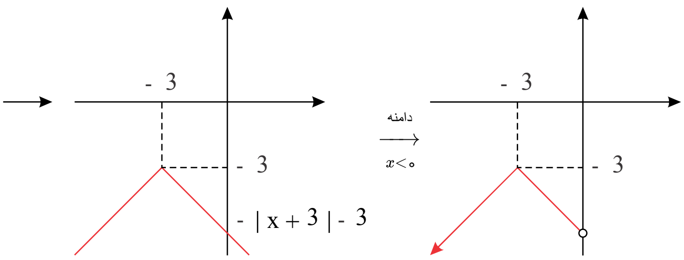
$g(x)$:



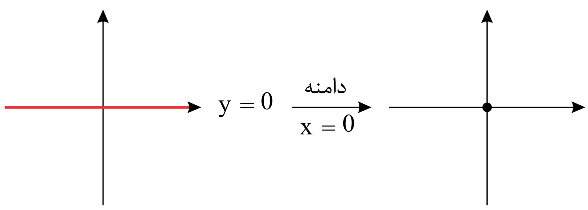
$h(x)$:

$-|x+۳|-۳$:

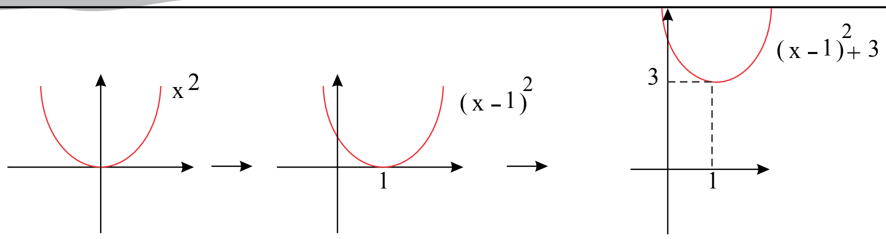


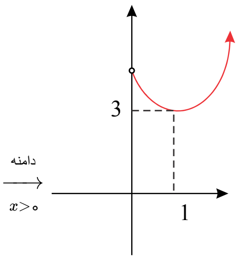


$y=۰$:

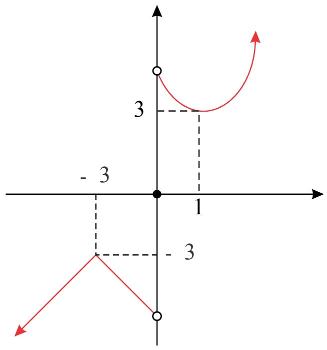


$(x-1)^2+3$:



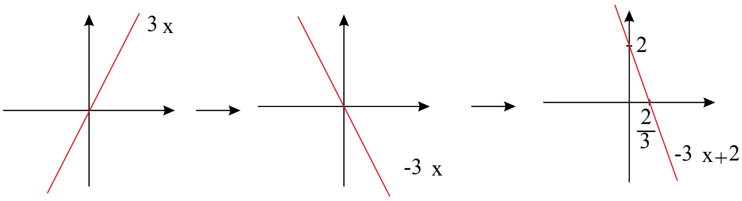


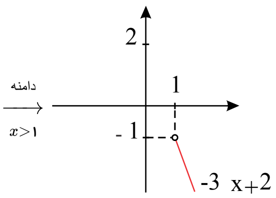
h (x):



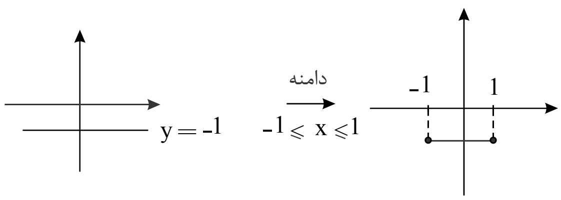
$z(x)$:

$-3x+2$:

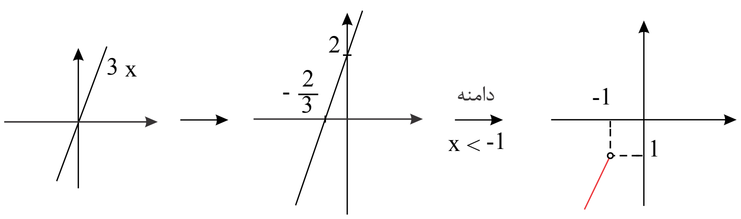




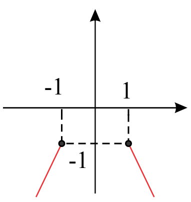
$y=-1$:



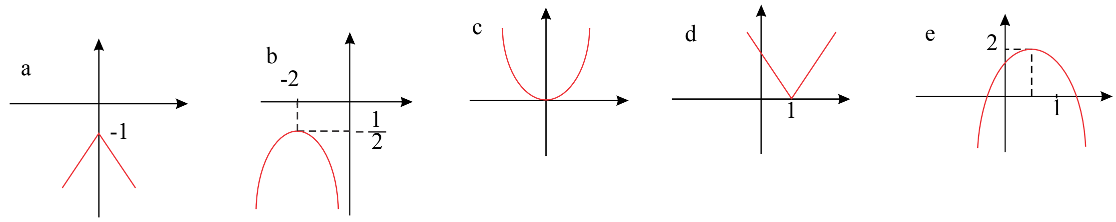
$3x+2$:



$z(x)$:



بارم		
	هر یک از نمودارهای a تا e کدام یک از توابع الف تا هـ را نشان می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟	۲۳



الف) $y = x^{۲}$ ب) $y = |x - ۱|$ ج) $-|x| - ۱$

د) $-(x - \frac{۱}{۲})^{۲} + ۲$ هـ) $-(x + ۲)^{۲} - \frac{۱}{۲}$

تابع الف نمودار c دامنه $= \mathbb{R}$ برد $= [۰, +\infty)$

تابع ب نمودار d دامنه $= \mathbb{R}$ برد $= [۰, +\infty)$

تابع ج نمودار a دامنه $= \mathbb{R}$ برد $= (-\infty, -۱]$

تابع د نمودار e دامنه $= \mathbb{R}$ برد $= (-\infty, ۲]$

تابع هـ نمودار b دامنه $= \mathbb{R}$ برد $= (-\infty, -\frac{۱}{۲}]$

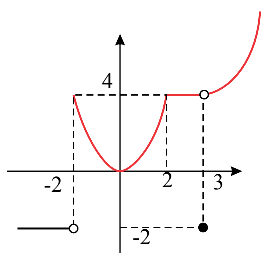
بارم		
	نمودار تابع f به شکل زیر است؛ ضابطه‌ی این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.	۲۴

$f(۴)$

$f(-۳)$

$f(۳)$

$f(۱)$



پاسخ: یک تابع چند ضابطه‌ای داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-۳)^{۲} + ۴ & x > ۳ \\ -۲ & x = ۳ \\ ۴ & ۲ \leq x < ۳ \\ x^{۲} & -۲ \leq x \leq ۲ \\ -۲ & x < -۲ \end{cases}$$

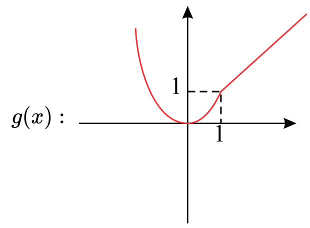
$f(۴) = (۴ - ۳)^{۲} + ۴ = ۱^{۲} + ۴ = ۱ + ۴ = ۵$

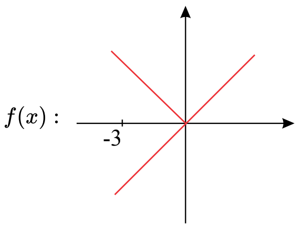
$f(-۳) = -۲$ $f(۳) = -۲$ $f(۱) = ۱^{۲} = ۱$

بارم		
	کدام یک از معادلات زیر نشان‌دهنده‌ی یک تابع است؟ چرا؟ نمودار هر یک را رسم کنید.	۲۵

$$g(x) = \begin{cases} x^{۲} & x < ۱ \\ ۲x - ۱ & x \geq ۱ \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x & x < ۰ \\ |x| & x \geq -۳ \end{cases}$$

پاسخ: با رسم هر یک داریم:





باتوجه به اینکه در بازه‌ی $[-۳, ۰)$ در تابع $f(x)$، خطوط موازی محور yها، تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس $f(x)$ تابع نیست.

۲۶	کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟	بارم

$$g = \left\{(۰, ۱), (\frac{۳}{۵}, ۱), (-۵, ۱), (۸, ۱)\right\} \qquad f = \{(۲, ۱), (۳, -۵), (۳, ۷)\}$$

$$k = \{(۲, ۵)\} \qquad h = \{(۲, ۳), (۳, ۲), (۱, ۱)\}$$

$$l = \{(۱, ۲), (۲, ۴), (۳, ۶), \cdots\} \qquad r = \{(۲, ۰), (-۷, ۰)\}$$

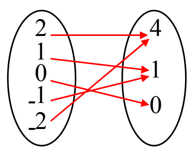
پاسخ: می‌دانیم: در نمایش زوج مرتبی رابطه زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه‌های اولشان یکسان نباشد مگر اینکه مؤلفه‌های دومشان نیز یکسان باشند. (تکراری باشند)

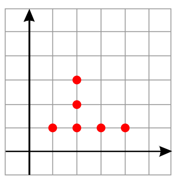
k : تابع است h : تابع است g : تابع است $f : \begin{cases} (۳, -۵) \\ (۳, ۷) \end{cases}$ تابع نیست

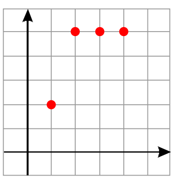
l : تابع است r : تابع است

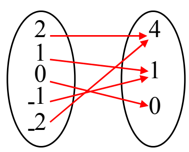
۲۷	کدام یک تابع است؟	بارم

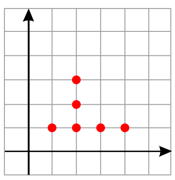
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

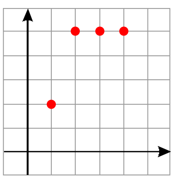












تابع است

$D = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$

$R = \{۰, ۱, ۴\}$

تابع نیست

تابع است

$D = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

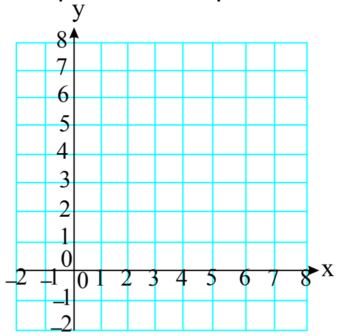
$R = \{۲, ۵\}$

بارم

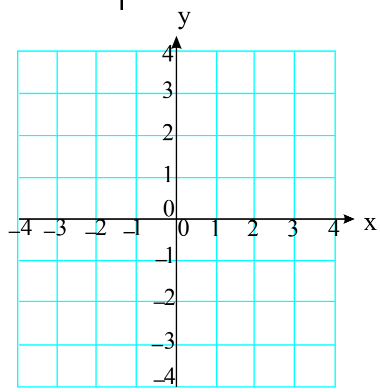
۲۸

جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

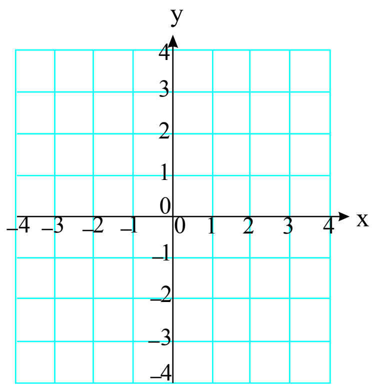
	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = ۲x$	$g(x) = ۲x$	$h(x) = ۲x$	$y = ۲x$
دامنه	$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$	مجموعهٔ اعداد حقیقی	$[۲, ۳]$	مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی
برد	?	مجموعهٔ اعداد حقیقی	?	?



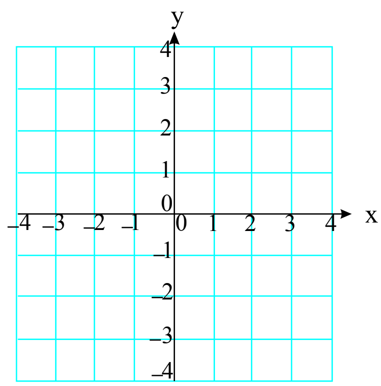
(الف)



(ب)

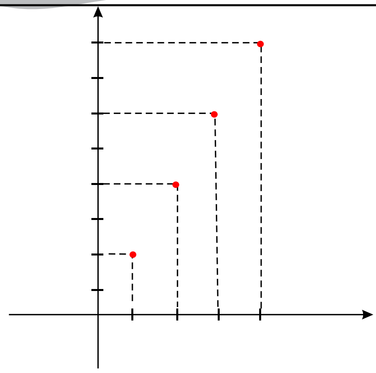


(پ)

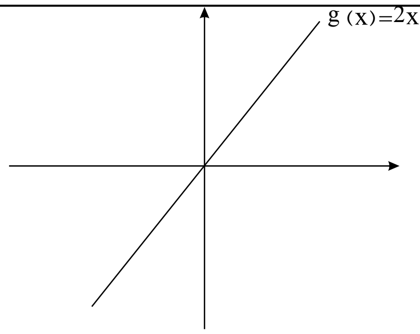


(ت)

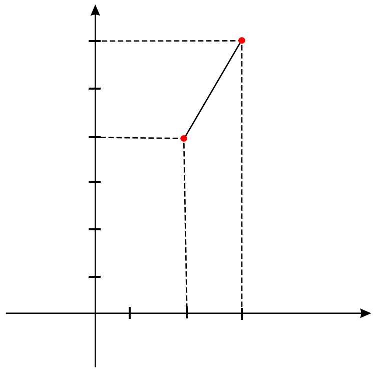
	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = ۲x$	$g(x) = ۲x$	$h(x) = ۲x$	$y = ۲x$
دامنه	$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$	مجموعهٔ اعداد حقیقی	$[۲, ۳]$	مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{۲, ۴, ۶, ۸\}$	مجموعهٔ اعداد حقیقی	$[۴, ۶]$	مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی

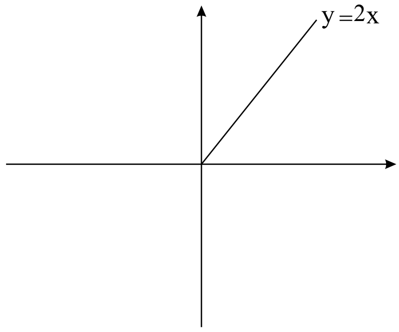


(الف)



(ب)

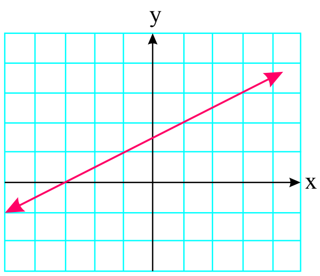

(پ)



(ت)

۲۹		بارم

۲۹ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید. از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام‌یک مناسب‌تر است؟



پاسخ: می‌دانیم: $\boxed{\text{مفهوم تابع خطی } y=ax+b \text{ است.}}$

$$(1,2),\ (-3,0) \Rightarrow \begin{cases} 2=a+b \\ 0=-3a+b \end{cases}$$

$$2=4a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$2=a+b \Rightarrow 2=\frac{1}{2}+b \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

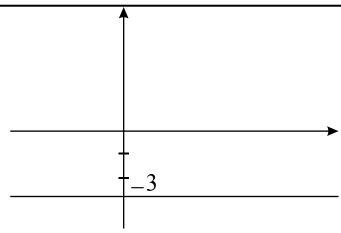
۳۰ الف) تابع $f(x)=-3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به‌دست آورید.

ب) اگر دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

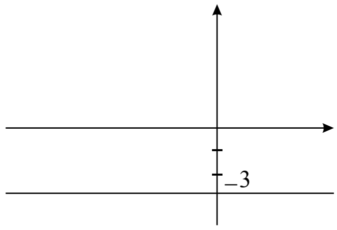
پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنهٔ آن بازهٔ $[-2,5]$ باشد، نیز رسم کنید.

پاسخ: الف)

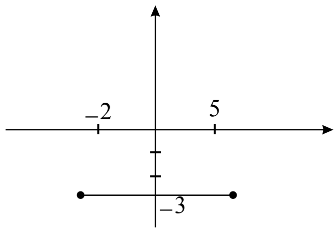
$f(۲) = f(۱۰۰) = f(-۵) = f(\sqrt{۵}) = f(-\frac{۳}{۴}) = -۳$



ب)



پ)



بارم

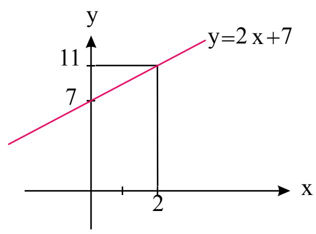
۳۱ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(۲) = ۱۱$ و $f(۰) = ۷$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم: $\boxed{\text{تابع خطی به فرم } y = ax + b \text{ است.}}$

$f(۰) = ۷ \Rightarrow ۷ = b$

$f(۲) = ۱۱ \Rightarrow ۱۱ = ۲a + ۷ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$

$y = ۲x + ۷$



بارم

۳۲ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

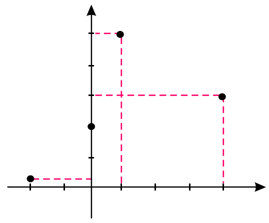
x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

پاسخ: بله، زیرا به‌ازای هر x تنها یک y داریم.

بارم

۳۳ اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم: $g(۴) = ۳, g(-۲) = \frac{۱}{۳}, g(۱) = ۵, g(۰) = ۲$ ، g را به‌صورت مجموعه‌ای مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g = \left\{(۰,۲), (۱,۵), (-۲, \frac{۱}{۳}), (۴,۳)\right\}$$

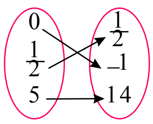


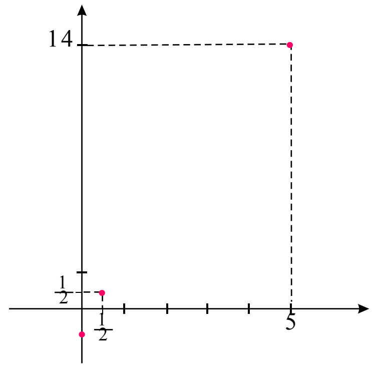
۳۴	طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل برحسب تابعی از عرض آن بیان کند. پاسخ: اگر عرض آن را x بنامیم داریم: $P = ۲(x + (x + ۳)) = ۲(۲x + ۳) = ۴x + ۶$	بارم

۳۵ تابع $f(x) = ۳x - ۱$ را که دامنهٔ آن مجموعهٔ $\left\{\frac{۱}{۲}, ۰, ۵\right\}$ است، رسم کنید. این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟ (بارم)

$$R_f = \left\{\frac{۱}{۲}, -۱, ۱۴\right\}$$

$$f = \left\{(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}), (۰, -۱), (۵, ۱۴)\right\}$$

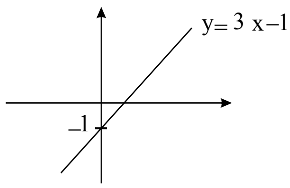




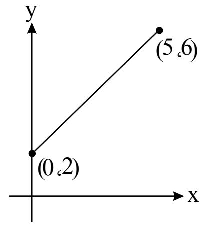
اگر دامنه $\mathbb{R}$ باشد:

$$R_f = \mathbb{R}$$

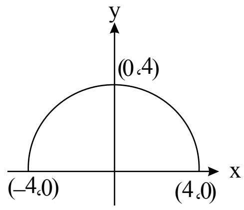
$$f = \{\cdots, (-۱, -۴), (۰, -۱), (۱, ۲), \cdots\}$$



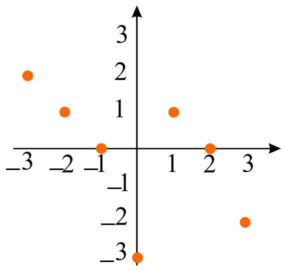
بارم		
	در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به‌صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری (الف) و (ج) را بنویسید.	۳۶



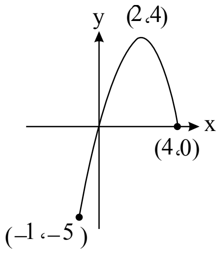
(الف)



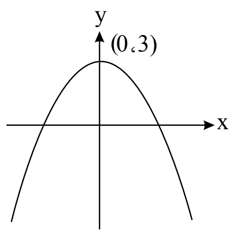
(ب)



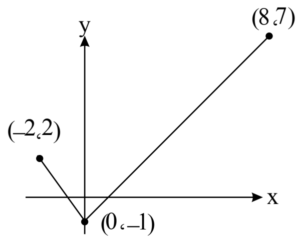
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

الف) $D=[۰,۵] \quad , \quad R=[۲,۶]$

$y=ax+b \xrightarrow{(۰,۲)} ۲=b$

$y=ax+۲ \xrightarrow{(۵,۶)} ۶=۵a+۲ \Rightarrow ۵a=۴ \Rightarrow a=\frac{۴}{۵}$

$y=\frac{۴}{۵}x+۲$

ب) $D=[-۴,۴] \qquad R=[۰,۴]$

$-۲\le x\le ۰ \Rightarrow y=ax+b \begin{cases} \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱=b \\ \xrightarrow{(-۲,۲)} ۲=-۲a-۱ \Rightarrow ۳=-۲a \Rightarrow a=\frac{-۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow y=\frac{-۳}{۲}x-۱$

$۰\le x\le ۸ \Rightarrow y=ax+b \begin{cases} \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱=b \\ \xrightarrow{(۸,۷)} ۷=۸a-۱ \Rightarrow ۸a=۸ \Rightarrow a=۱ \end{cases} \Rightarrow y=x-۱$

$f(x)=\begin{cases} -\frac{۳}{۲}x-۱ & -۲\le x\le ۰ \\ x-۱ & ۰\le x\le ۸ \end{cases}$

پ) $D=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\} \qquad R=\{-۳,-۲,۰,۱,۲\}$

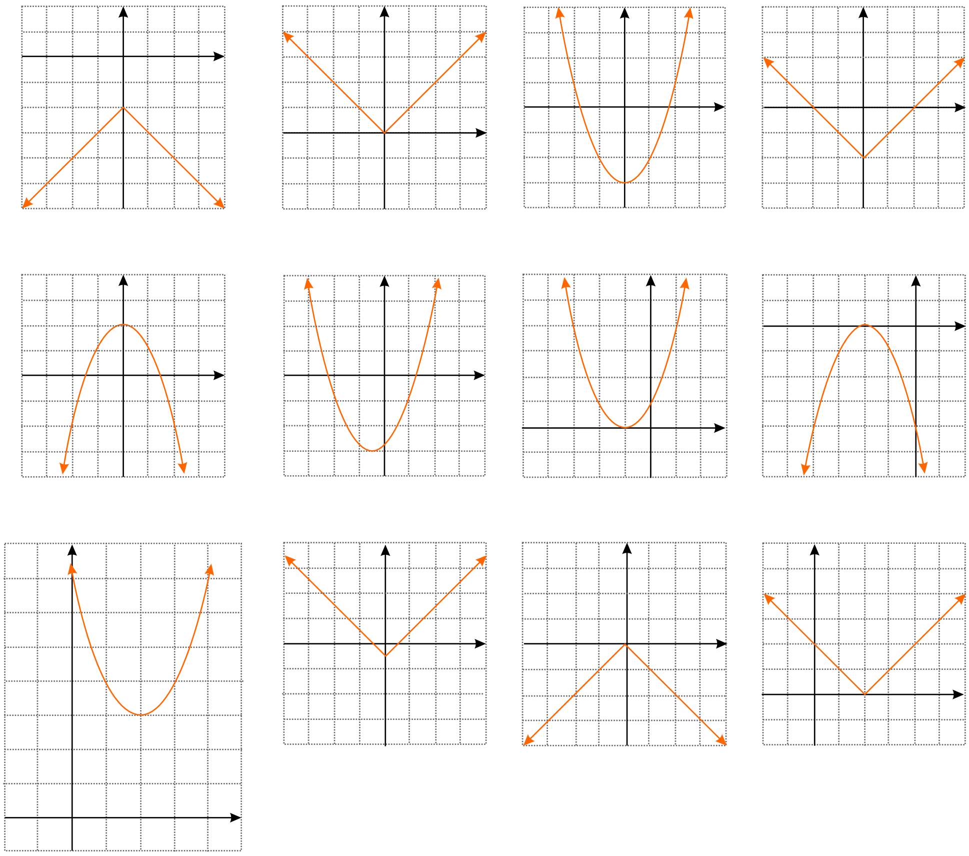
ت) $D=[-۱,۴] \qquad R=[-۵,۴]$

ث) $D = \mathbb{R} \qquad R = (-\infty, ۳]$

ج) $D = [-۲, ۸] \qquad R = [-۱, ۷]$

۳۷	هریک از نمودارهای زیر کدام‌یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟	بارم

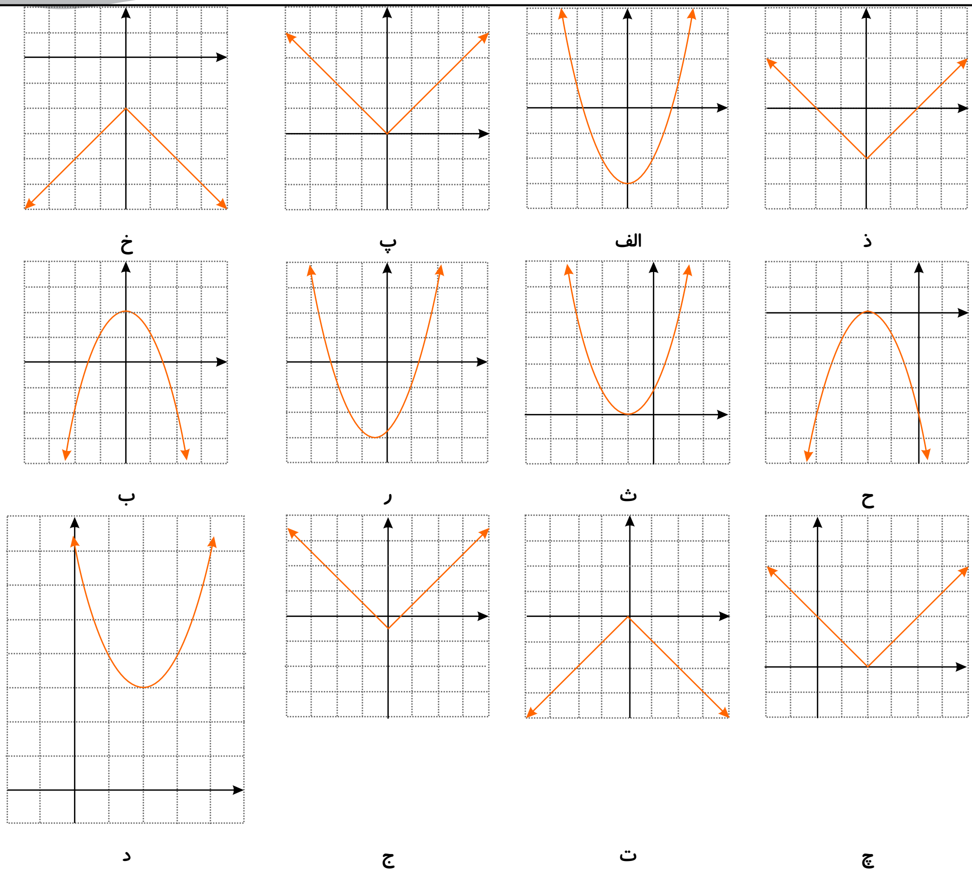
هریک از نمودارهای زیر کدام‌یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^{۲} - ۳$ ب) $y = -x^{۲} + ۲$ پ) $y = |x|$ ت) $y = -|x|$

ث) $y = (x+۱)^{۲}$ ج) $y = |x| - \frac{۱}{۲}$ چ) $y = |x - ۲|$ ح) $y = -(x+۲)^{۲}$

خ) $y = -|x| - ۲$ د) $y = (x-۲)^{۲} + ۳$ ذ) $y = |x| - ۲$ ر) $y = (x + \frac{۱}{۲})^{۲} - ۳$

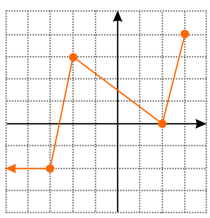


تابع	دامنه	برد
الف	$\mathbb{R}$	$[-3, +\infty)$
ب	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 2]$
پ	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$
ت	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$
ث	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$
ج	$\mathbb{R}$	$[-\frac{1}{2}, +\infty)$
چ	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$
ح	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$
خ	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -2]$
د	$\mathbb{R}$	$[3, +\infty)$
ذ	$\mathbb{R}$	$[-2, +\infty)$
ر	$\mathbb{R}$	$[-3, +\infty)$

بارم

۳۸ نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$f(-\frac{5}{2})$ $\quad f(0)$ $\quad f(\frac{1}{2})$ $\quad f(3)$ $\quad f(6)$ $\quad f(\sqrt{5})$



$x \leq -3 \Rightarrow y = -2$

$$-۳ \leq x \leq -۲ \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(-۳,-۲)} -۲ = -۳a + b \\ \xrightarrow{(-۲,۳)} \underline{۳ = -۲a + b} \\ -۵ = -a \Rightarrow a = ۵ \end{cases}$$

$$-۲ = -۳ \times ۵ + b \Rightarrow -۲ = -۱۵ + b \Rightarrow b = ۱۳$$

$$-۳ \leq x \leq -۲ \Rightarrow y = ۵x + ۱۳$$

$$-۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۲,۰)} ۰ = ۲a + b \\ \xrightarrow{(-۲,۳)} \underline{۳ = -۲a + b} \\ ۳ = ۲b \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$۲a + \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲}$$

$$-۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲}$$

$$۲ \leq x \leq ۳ \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۲,۰)} ۰ = ۲a + b \\ \xrightarrow{(۳,۴)} \underline{۴ = ۳a + b} \\ ۴ = a \end{cases}$$

$$۲ \times ۴ + b = ۰ \Rightarrow ۸ + b = ۰ \Rightarrow b = -۸ \Rightarrow y = ۴x - ۸$$

$$۲ \leq x \leq ۳ \Rightarrow y = ۴x - ۸$$

$$f(x) = \begin{cases} -۲ & x \leq -۳ \\ ۵x + ۱۳ & -۳ \leq x \leq -۲ \\ -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲} & -۲ \leq x \leq ۲ \\ ۴x - ۸ & ۲ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

$$۲ \leq \sqrt{۵} \leq ۳ \Rightarrow f(\sqrt{۵}) = ۴\sqrt{۵} - ۸$$

$$۶ > ۳ \Rightarrow f(۶) = \text{تعریف نشده}$$

$$۳ = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۴ \times ۳ - ۸ = ۱۲ - ۸ = ۴$$

$$-۲ \leq \frac{۱}{۲} \leq ۲ \Rightarrow f(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = \frac{-۳}{۸} + \frac{۱۲}{۸} = \frac{۹}{۸}$$

$$-۲ \leq ۰ \leq ۲ \Rightarrow f(۰) = -\frac{۳}{۴} \times ۰ + \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$-۳ \leq \frac{-۵}{۲} \leq -۲ \Rightarrow f(\frac{-۵}{۲}) = ۵ \times (-\frac{۵}{۲}) + ۱۳ = \frac{-۲۵}{۲} + \frac{۲۶}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۳۹	نمودار یک تابع خطی از نقاط $(۴,۳)$ و $(۰,۳)$ می‌گذرد. $f(-۴)$ و $f(-۱)$ را به‌دست آورید. $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۰,۳)} ۳ = b \\ \xrightarrow{(۴,۳)} ۳ = ۴a + ۳ \Rightarrow ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = ۳$	بارم

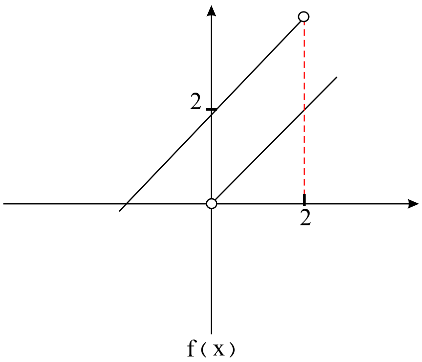
$f(x) = ۳ \Rightarrow \begin{cases} f(-۱) = ۳ \\ f(-۴) = ۳ \end{cases}$

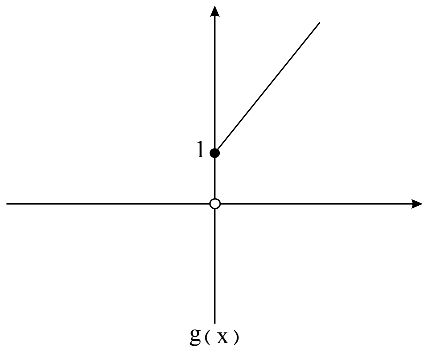
بارم

۴۰ **کدام‌یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.**

$$f(x) = \begin{cases} x & x > ۰ \\ x + ۲ & x \leq ۲ \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} ۲x & x < ۰ \\ x + ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

$g(x)$، زیرا خطوط موازی محور yها را حداکثر در یک نقطه قطع کرده است.





بارم

۴۱ **نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(۱, -۲)$ و $(۲, -۳)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.**

$$y = ax^۲ + bx + c$$

$$\xrightarrow{(۰,۱)} ۱ = c$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{(۱,-۲)} \\ \xrightarrow{(۲,-۳)} \end{matrix} \begin{cases} -۲ = a + b + ۱ \\ -۳ = ۴a + ۲b + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶ = ۲a + ۲b \\ -۴ = ۴a + ۲b \end{cases}$$

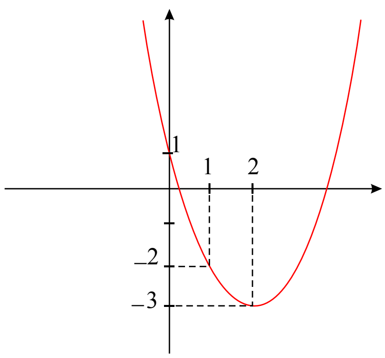
$$۲ = ۲a \Rightarrow a = ۱$$

$$۲a + ۲b = -۶ \xrightarrow{a=۱} ۲ + ۲b = -۶ \Rightarrow ۲b = -۸ \Rightarrow b = -۴$$

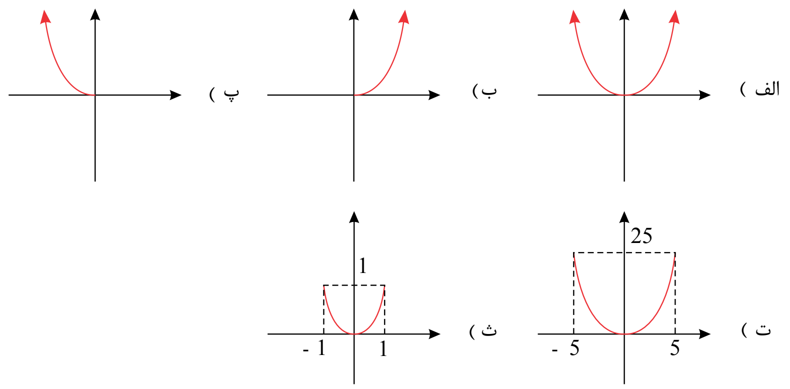
$$y = x^۲ - ۴x + ۱$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-۳, +\infty)$$



۴۲	کدام یک از نمودارهای زیر نمایش صحیحی برای تابع $f(x)=x^{۲}$ است؟ چرا؟	بارم



پاسخ: اگر نمایش جبری تابع داده شده باشد، ولی دامنه‌ی آن مشخص نباشد، معمولاً دامنه را، بزرگترین مجموعه‌ی ممکن در نظر می‌گیریم. بعنوان مثال در تابع $f(x)=x^{۲}$، دامنه را مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

باتوجه به نکته‌ی فوق نمایش الف برای تابع درست است.

دقت کنید که تمام نمایش‌های فوق در دامنه‌های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی برای $f(x)=x^{۲}$ صحیح هستند اما از آنجا که دامنه مشخص نشده طبق نکته، نمایش الف درست است.

۴۳	نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(۱,-۴)$ و $(۲,-۳)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۳ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و با رسم آن، دامنه و بردش را معلوم کنید.	بارم

$y=ax^{۲}+bx+c$

$(۰,-۳):\ -۳=c$

$(۱,-۴): a+b-۳=-۴ \Rightarrow a+b=-۱ \Rightarrow ۲a+۲b=-۲$

$(۲,-۳): ۴a+۲b-۳=-۳ \Rightarrow ۴a+۲b=۰$

$\begin{cases} ۲a+۲b=-۲ \\ \underline{۴a+۲b=۰} \end{cases}$

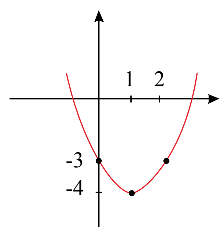
$-۲a=-۲ \Rightarrow \boxed{a=۱}$

$۲a+۲b=-۲ \Rightarrow ۲+۲b=-۲ \Rightarrow ۲b=-۴ \Rightarrow \boxed{b=-۲}$

$y=x^{۲}-۲x-۳$

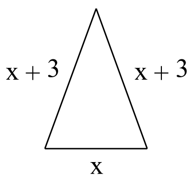
دامنه $=\mathbb{R}$

برد $=[-۴,+\infty)$



پاسخنامه تشریحی

۱ باتوجه به شکل قابل داریم:



$$P = x + ۳ + x + ۳ + x = ۳x + ۶$$

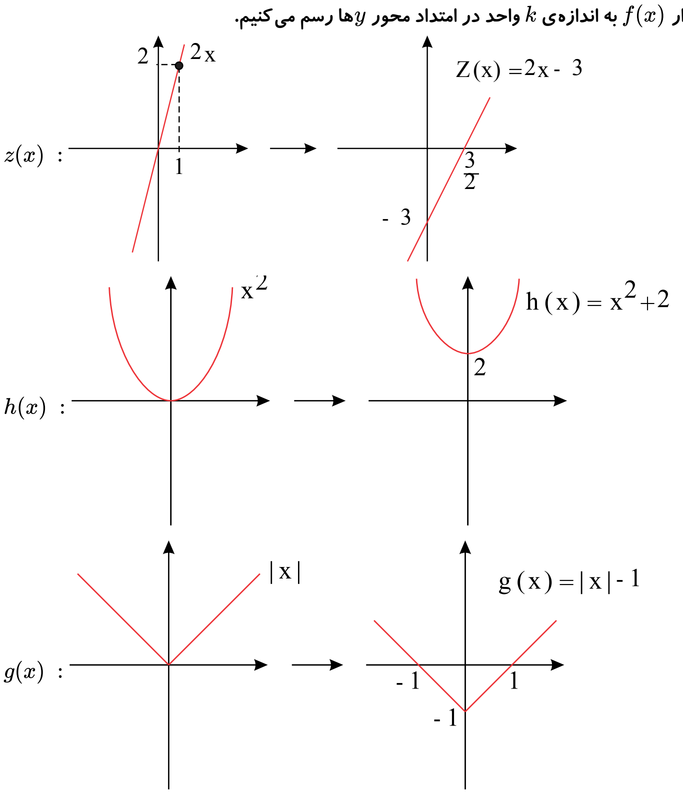
$$\boxed{P = ۳x + ۶}$$

۲ الف) تابع است؛ زیرا طبق تعریف از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده: دقت کنید در تابع بودن یا نبودن، ورود پیکان به اعضای B، هیچ تأثیری ندارد، برای مثال ممکن است به یکی از اعضاء B، یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا ممکن است اصلاً پیکانی وارد نشود که در هر سه حالت گفته شده، نمودار پیکانی مورد نظر، می‌تواند تابع باشد یا نباشد و ارتباطی به B ندارد.

ب) تابع نیست؛ زیرا از d پیکانی خارج نشده و طبق تعریف، یک تابع از A به B رابطه‌ای بین A و B است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت داده شود.

پ) تابع نیست؛ چون از دو عضو b و c بیش از یک پیکان خارج شده و طبق تعریف، یک تابع از A به B رابطه‌ای بین A و B است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو B نسبت داده شود.

۳ ابتدا توابع $۲x$، $x^۲$ و $|x|$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار کلی $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه‌ی k واحد در امتداد محور yها رسم می‌کنیم.



۴ الف) تابع است: مؤلفه‌های اول تمام زوج مرتب‌ها با هم متفاوت است.

ب) تابع نیست: وجود دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,۳)$، دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت را نشان می‌دهد که رابطه را از تابع بودن خارج می‌کند.

پ) تابع است: دقت کنید زوج مرتب $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ تنها دو بار نوشته شده‌اند.

ت) تابع است: دقت کنید مولفه‌ی دوم زوج مرتب‌ها، تأثیری در تابع بودن یا نبودن رابطه ندارد.

۵ الف) $\{(a,d),(b,e),(c,f)\}$ تابع است

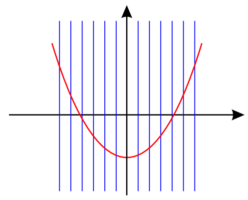
ب) $\{(a,d),(a,e),(c,e)\}$ تابع نیست

پ) $\{(a,g),(b,g),(c,g)\}$ تابع نیست

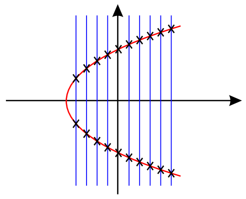
۶ باتوجه به تعریف، برای اینکه یک نمودار، تابع باشد باید به ازای هر x، فقط و فقط یک y موجود باشد یا به عبارت دیگر، خطوط موازی با محور yها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع

نکنند.

الف) تابع است :



ب) تابع نیست :



۷

برای اینکه یک رابطه که به صورت زوج مرتب نوشته شده است تابع باشد، باید مؤلفه‌های اول یکسان، مؤلفه‌های دوم یکسان نیز داشته باشند، در واقع زوج مرتب تکراری باشد پس:

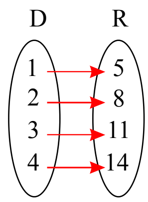
الف) $\begin{cases}(3, 2a-b)\\ (\frac{6}{2}, 2a+b)\end{cases} \Rightarrow 2a-b = 2a+b \Rightarrow b = 0 \qquad \begin{cases}(2, 3)\\ (\frac{2}{1}, \frac{3}{a})\end{cases} \Rightarrow \frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = 1$

ب) $\begin{cases}(b, a)\\ (b, 2a-b)\end{cases} \Rightarrow a = 2a-b \Rightarrow a = b \ (I) \qquad \begin{cases}(a, a)\\ (a, 2b)\end{cases} \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a = b = 2b \ (II)$

$\xrightarrow{I, II} a = b = 2b \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}$

۸

با قرار دادن تک تک اعضاء دامنه در ضابطه، برد بدست می‌آید.



$f(x) = 3x+2 \begin{cases} \xrightarrow{x=1} f(1) = 5 \\ \xrightarrow{x=2} f(2) = 8 \\ \xrightarrow{x=3} f(3) = 11 \\ \xrightarrow{x=4} f(4) = 14 \end{cases} \Rightarrow$ برد $R = \{5, 8, 11, 14\}$

۹

دامنه‌ی تابع f از آنجا که $x \in \mathbb{N}$ است برابر می‌شود با تمام اعداد طبیعی $D_f = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ و برد آن باتوجه به $f(1) = 3$ ، $f(2) = 5$ ، $f(3) = 7$ و.... مجموعه اعداد فرد طبیعی بزرگتر از ۲ است:

$R_f = \{3, 5, 7, 9, \cdots\}$

دامنه‌ی تابع g از آنجا که $x \in \mathbb{Z}$ است برابر می‌شود با مجموعه اعداد صحیح:

$D_g = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$

و با توجه به $g(2) = 3$ $g(1) = 1$ ،$g(0) = -1$ ،$g(-1) = -3$ برد آن مجموعه اعداد فرد می‌شود:

$R_g = \{-3, -1, 1, 3, \cdots\}$

$f(4) = 2 \times 4 + 1 = 8 + 1 = 9 = g(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

۱۰

الف) تابع نیست: ۱- از ۳ هیچ فلشی خارج نشده ۲- از صفر دو فلش خارج شده

ب) تابع است. برد $= \{2, 4, 6\}$ دامنه $= \{3, 2, 0, 5, 1\}$

ج) تابع نیست: خطوط موازی محور y بیش از یک نقطه را روی نمودار قطع می‌کنند که نشان‌دهنده‌ی این است که به ازای یک x، بیش از یک y داریم.

د) تابع است. برد $= \{-1, 0, 1\}$ دامنه $= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

هـ) تابع نیست: برخی زوج مرتب‌ها مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متفاوت دارند.

و) تابع است. برد $= \{1, 2\}$ دامنه $= \{1, 2, 3, 4\}$

ز) تابع است. برد $= \mathbb{R}^+$ یا $[0, +\infty)$ دامنه $= \mathbb{R}$

ح) تابع است. برد $= (-a, a)$ دامنه $= \mathbb{R}$

ط) تابع نیست: خطوط موازی محور y نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

ی) تابع نیست: خطوط موازی محور y نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

ک) تابع است. $\mathbb{R} =$ برد $=$ دامنه

ل) تابع است. $\mathbb{R} =$ برد $=$ دامنه

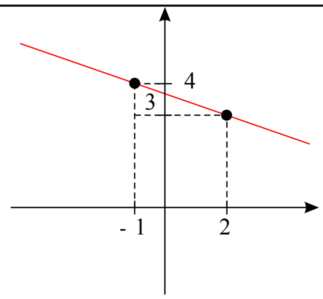
۱۱

فرم کلی تابع خطی به شکل $y = ax + b$ است؛ باتوجه به سؤال داریم:

$$\begin{cases} f(-1)=4 \\ f(2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=-a+b \\ 3=2a+b \end{cases} \Rightarrow 4=\frac{1}{3}+b \Rightarrow b=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$

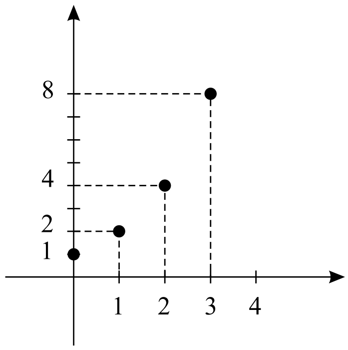
$$1=-3a \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$$



۱۲

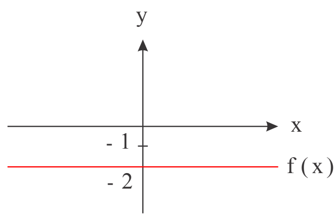
$$g(x)=\{(0,1),(1,2),(2,4),(3,8)\}$$



تابع $g(x)$ خطی نیست چرا که در معادله $y=ax+b$ صدق نمی‌کند و در حقیقت نقاط روی یک خط واحد قرار ندارند.

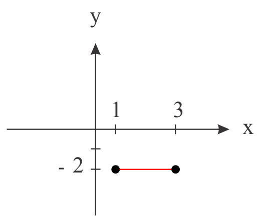
۱۳

الف)



$$f(x)=-2 \begin{cases} f(-1)=-2 \\ f(2)=-2 \\ f(7)=-2 \\ f(-9)=-2 \end{cases}$$

ب)

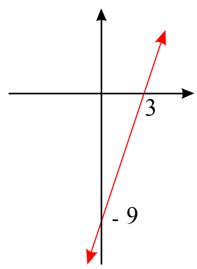


۱۴

با جایگذاری نقطه‌ی مورد نظر در ضابطه تابع داریم:

$$f(x)=3x-b \xrightarrow{(2,-3)} f(2)=3(2)-b$$

$$\Rightarrow -3=6-b \Rightarrow -b=-9 \Rightarrow b=9 \qquad \boxed{f(x)=3x-9}$$



۱۵

الف) $g(-2)=3(-2)+2=-6+2=-4$

$$f\left(g(-2)\right)=f(-4)=\frac{-4}{2}-1=-2-1=-3$$

ب) $g\left(\frac{-2}{3}\right)=3\left(\frac{-2}{3}\right)+2=-2+2=0$

$$۳g(\frac{-۲}{۳}) = ۳ \times ۰ = ۰$$

$$f\left(۳g(\frac{-۲}{۳})\right) = f(۰) = \frac{۰}{۲} - ۱ = ۰ - ۱ = -۱$$

ج) $f(-۲) = \frac{-۲}{۲} - ۱ = -۱ - ۱ = -۲$

$$g\left(f(-۲)\right) = g(-۲) = ۳(-۲) + ۲ = -۶ + ۲ = -۴$$

د) $f(-۲) = \frac{-۲}{۲} - ۱ = -۱ - ۱ = -۲$

$$۳f(-۲) = ۳(-۲) = -۶$$

$$g(۳f(-۲)) = g(-۶) = ۳(-۶) + ۲ = -۱۸ + ۲ = -۱۶$$

$$\frac{g(۳f(-۲))}{-۸} = \frac{-۱۶}{-۸} = ۲$$

۱۶

الف) تابع است. برد $= [۰, ۳)$ دامنه $= [-۳, ۲)$

ب) تابع است. برد $= [-۲, ۵)$ دامنه $= [-۱, +\infty)$

ج) تابع است. برد $= [۰, +\infty)$ دامنه $= \mathbb{R}$

د) تابع نیست: خطوط موازی محور yها، تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

هـ) تابع نیست: دقت کنید به دو نقطه‌ی $(۰, ۰)$ و $(۰, -۲)$

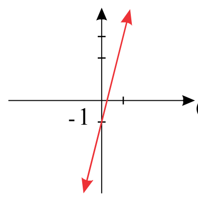
و) تابع است. برد $= [-۱, ۱]$ دامنه $= \mathbb{R}$

ز) تابع است. برد $= [-۲, +\infty)$ دامنه $= \mathbb{R}$

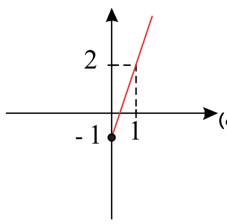
ح) تابع نیست: دقت کنید به دو نقطه‌ی $(-۱, ۱)$ و $(-۱, -۳)$

۱۷

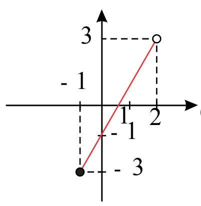
الف)



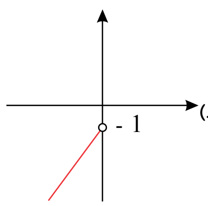
ب)



ج)



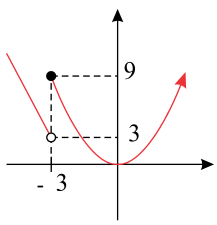
د)



۱۸

دامنه $= \mathbb{R}$

برد $= [۰, +\infty)$



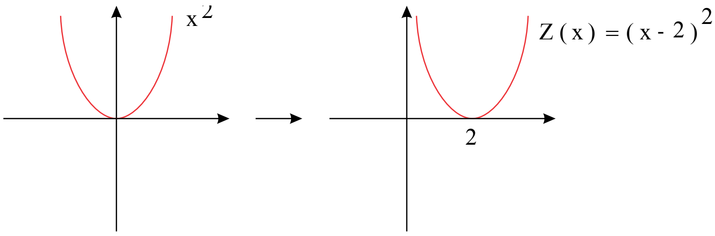
می‌دانیم که تابع $f(x) = |x|$ در xهای منفی به شکل تابع $f(x) = -x$ در می‌آید.

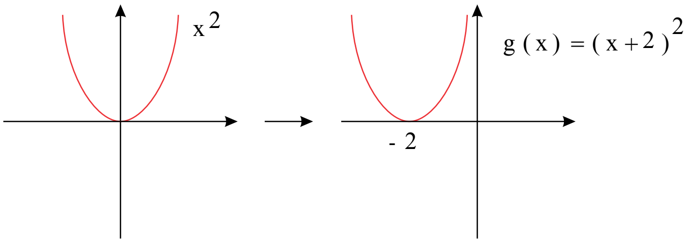
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x \leq ۰ \end{cases}$$

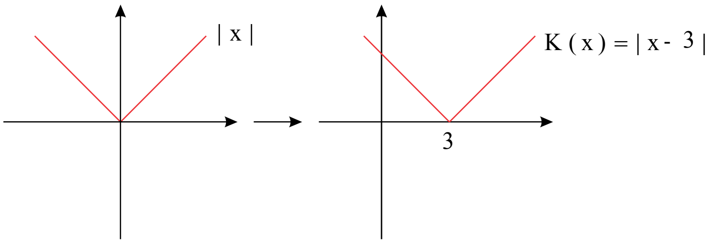
۱۹

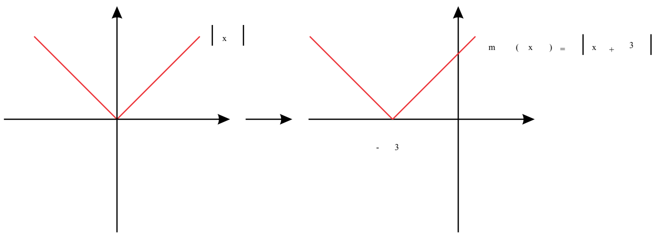
$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ & -۲\leq x\leq ۲ \\ ۲ & x<-۲ \text{ یا } x>۲ \end{cases}$	دامنه $=\mathbb{R}$ برد $=[-۴,۰]\cup\{۲\}$	

۲۰	برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافیست تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم که اگر $k>۰$ باشد انتقال در جهت منفی و اگر $k<۰$ باشد انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

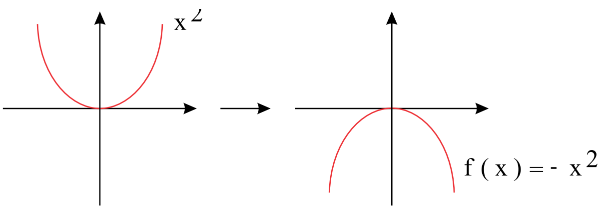
$z(x)$:


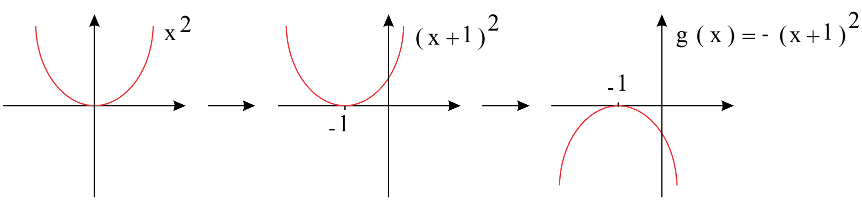
$g(x)$:


$k(x)$:


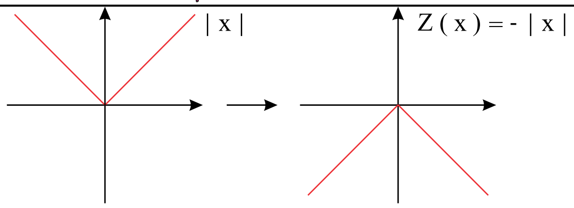
$m(x)$:


۲۱	ابتدا این نکته را در نظر می‌گیریم که ترتیب اولویت در رسم توابع به این شکل است: ابتدا انتقال‌های افقی (داخل پرانتز / قدر مطلق) سپس قرینه کردن (در صورت وجود منفی پشت قدر مطلق / پرانتز) و در نهایت انتقال عمودی.

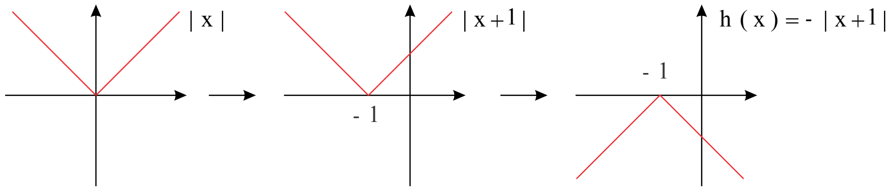
$f(x)$:


$g(x)$:


$z(x)$:



$h(x)$:

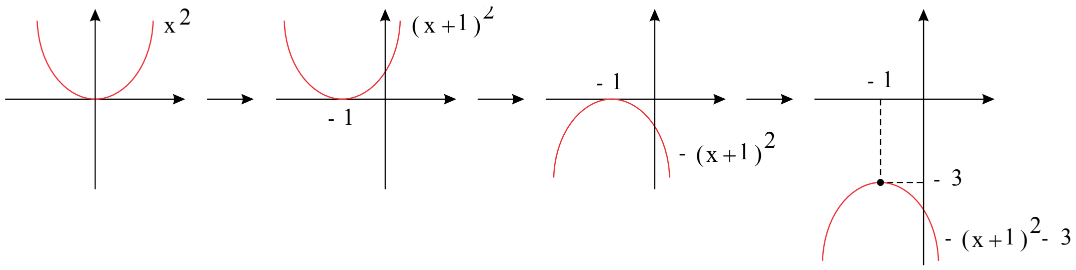


۲۲

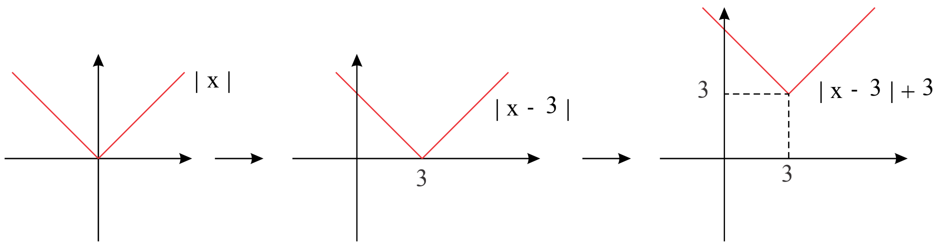
با در نظر گرفتن ترتیب زیر در رسم توابع به روش انتقال به رسم هر یک از توابع داده شده می‌پردازیم و برای توابع چند ضابطه‌ای نیز هر یک از ضابطه‌ها را به روش مشابه در دامنه‌ی داده شده رسم می‌کنیم:

۱- انتقال افقی　　۲- قرینه کردن　　۳- انتقال عمودی

$f(x)$:

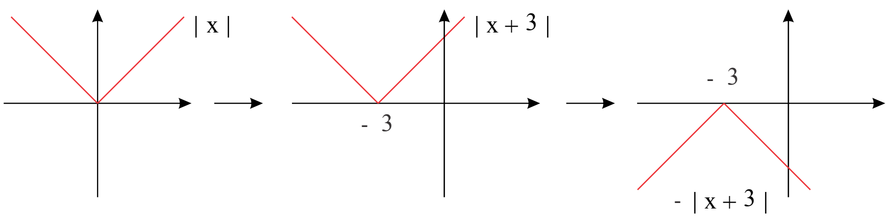


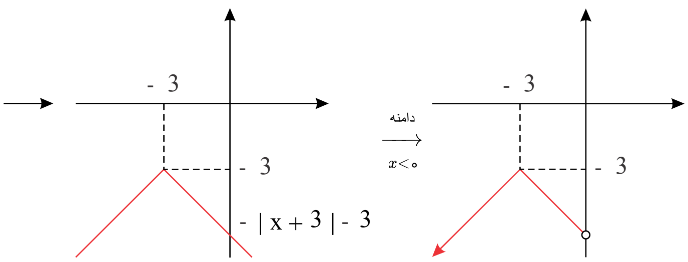
$g(x)$:



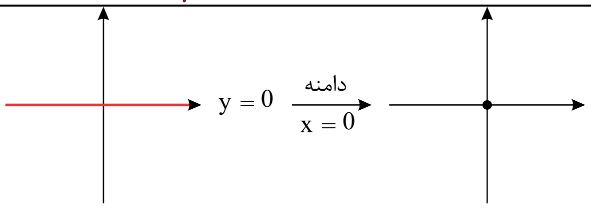
$h(x)$:

$-|x+۳|-۳$:

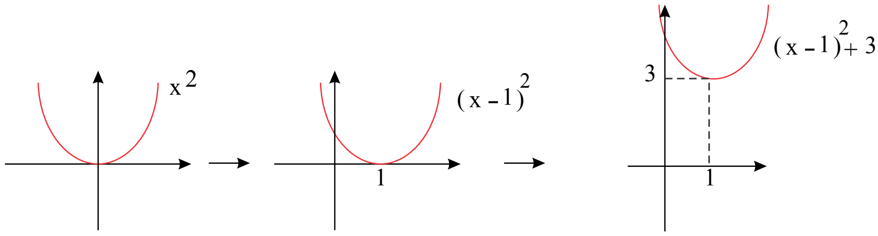


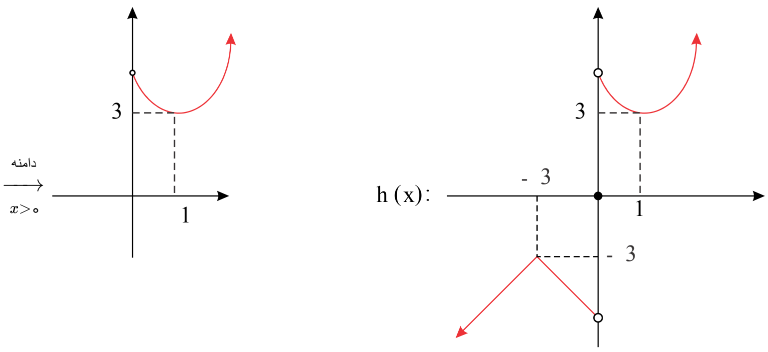


$y = ۰$:



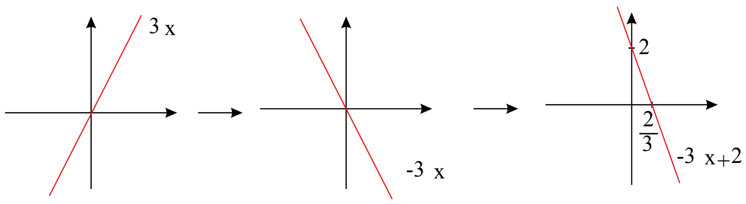
$(x-۱)^۲+۳$:

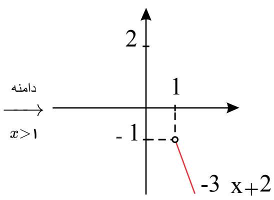




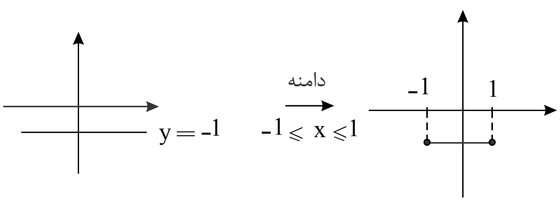
$z(x)$:

$-۳x+۲$:

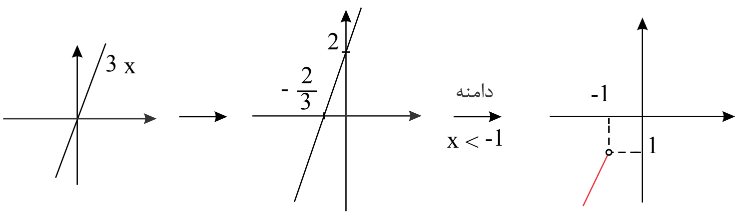




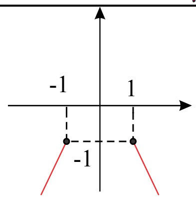
$y = -۱$:



$۳x+۲$:



$z(x)$:



۲۳

تابع الف نمودار c — دامنه $= \mathbb{R}$ — برد $= [۰, +\infty)$

تابع ب نمودار d — دامنه $= \mathbb{R}$ — برد $= [۰, +\infty)$

تابع ج نمودار a — دامنه $= \mathbb{R}$ — برد $= (-\infty, -۱]$

تابع د نمودار e — دامنه $= \mathbb{R}$ — برد $= (-\infty, ۲]$

تابع هـ نمودار b — دامنه $= \mathbb{R}$ — برد $= (-\infty, -\frac{۱}{۲}]$

۲۴

یک تابع چند ضابطه‌ای داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-۳)^۲ + ۴ & x > ۳ \\ -۲ & x = ۳ \\ ۴ & ۲ \leq x < ۳ \\ x^۲ & -۲ \leq x \leq ۲ \\ -۲ & x < -۲ \end{cases}$$

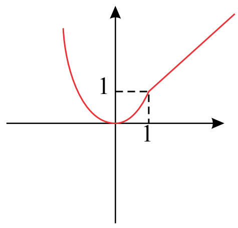
$$f(۴) = (۴-۳)^۲ + ۴ = ۱^۲ + ۴ = ۱ + ۴ = ۵$$

$f(-۳) = -۲$ $\quad$ $f(۳) = -۲$ $\quad$ $f(۱) = ۱^۲ = ۱$

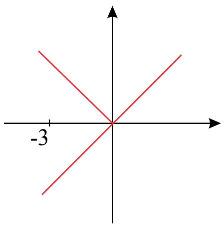
۲۵

با رسم هر یک داریم:

$g(x)$:



$f(x)$:



باتوجه به اینکه در بازه‌ی $[-۳, ۰)$ در تابع $f(x)$، خطوط موازی محور yها، تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس $f(x)$ تابع نیست.

۲۶

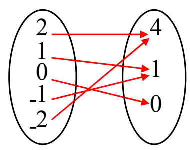
می‌دانیم:

در نمایش زوج مرتبی رابطه زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه‌های اولشان یکسان نباشد مگر اینکه مؤلفه‌های دومشان نیز یکسان باشند. (تکراری باشند)

$k :$ تابع است $\quad$ $h :$ تابع است $\quad$ $g :$ تابع است $\quad$ تابع نیست $f : \begin{cases} (۳, -۵) \\ (۳, ۷) \end{cases}$

$l :$ تابع است $\quad$ $r :$ تابع است

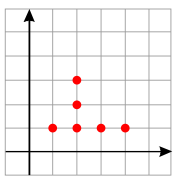
۲۷



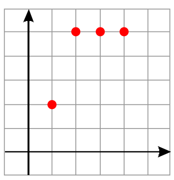
تابع است

$D = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$

$R = \{۰, ۱, ۴\}$



تابع نیست



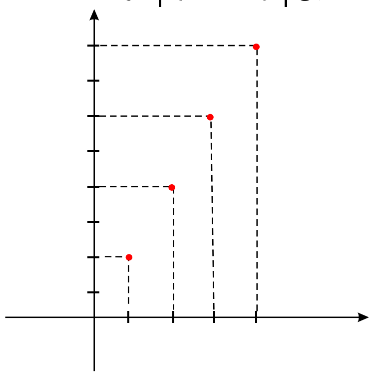
تابع است

$D = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

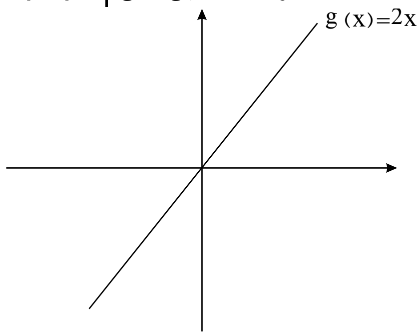
$R = \{۲, ۵\}$

۲۸

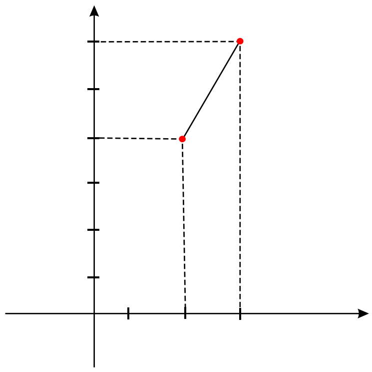
	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x)=۲x$	$g(x)=۲x$	$h(x)=۲x$	$y=۲x$
دامنه	$\{۱,۲,۳,۴\}$	مجموعهٔ اعداد حقیقی	$[۲,۳]$	مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{۲,۴,۶,۸\}$	مجموعهٔ اعداد حقیقی	$[۴,۶]$	مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی



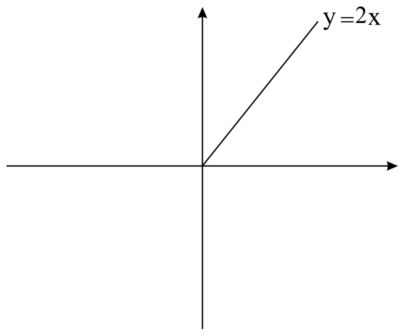
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۲۹

می‌دانیم: مفهوم تابع خطی $y=ax+b$ است.

$$\begin{matrix}(۱,۲)\\(-۳,۰)\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}۲=a+b\\ ۰=-۳a+b\end{cases}$$

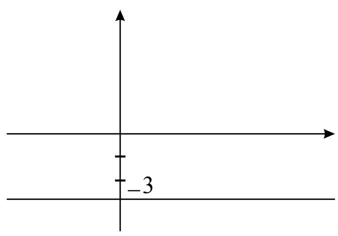
$$۲=۴a \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$۲=a+b \Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}+b \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

$$y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$$

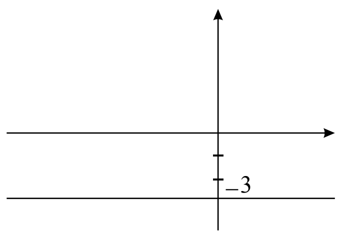
۳۰

(الف)

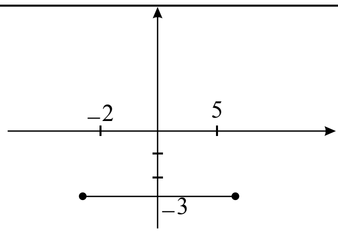


$$f(۲)=f(۱۰۰)=f(-۵)=f(\sqrt{۵})=f(-\frac{۳}{۴})=-۳$$

(ب)



پ)



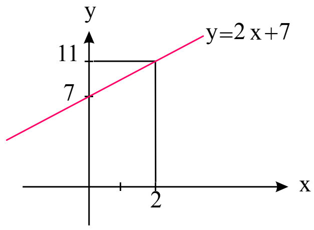
۳۱

می‌دانیم: $\boxed{\text{تابع خطی به فرم } y = ax + b \text{ است.}}$

$f(۰) = ۷ \Rightarrow ۷ = b$

$f(۲) = ۱۱ \Rightarrow ۱۱ = ۲a + ۷ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$

$y = ۲x + ۷$

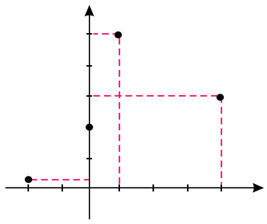


۳۲

بله، زیرا به‌ازای هر x تنها یک y داریم.

۳۳

$$g = \left\{(۰,۲), (۱,۵), (-۲,\frac{۱}{۳}), (۴,۳)\right\}$$



۳۴

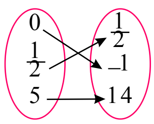
اگر عرض آن را x بنامیم داریم:

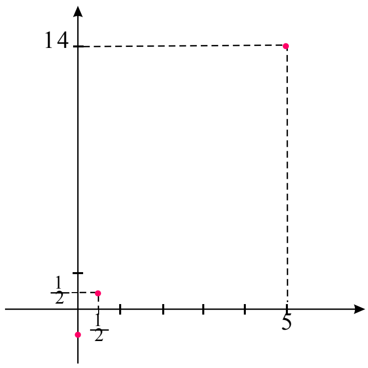
$P = ۲(x + (x + ۳)) = ۲(۲x + ۳) = ۴x + ۶$

۳۵

$$R_f = \left\{\frac{۱}{۲}, -۱, ۱۴\right\}$$

$$f = \left\{(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}), (۰,-۱), (۵,۱۴)\right\}$$

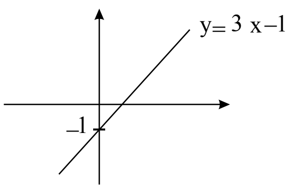




اگر دامنه $\mathbb{R}$ باشد:

$$R_f = \mathbb{R}$$

$$f = \{\cdots, (-۱,-۴), (۰,-۱), (۱,۲), \cdots\}$$



۳۶

الف) $D = [۰,۵]$, $R = [۲,۶]$

$$y = ax + b \xrightarrow{(۰,۲)} ۲ = b$$

$$y = ax + ۲ \xrightarrow{(۵,۶)} ۶ = ۵a + ۲ \Rightarrow ۵a = ۴ \Rightarrow a = \frac{۴}{۵}$$

$$y = \frac{۴}{۵}x + ۲$$

ب) $D = [-۴, ۴] \qquad R = [۰, ۴]$

$$-۲ \leq x \leq ۰ \Rightarrow y = ax + b \begin{cases} \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱ = b \\ \xrightarrow{(-۲,۲)} ۲ = -۲a - ۱ \Rightarrow ۳ = -۲a \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-۳}{۲}x - ۱$$

$$۰ \leq x \leq ۸ \Rightarrow y = ax + b \begin{cases} \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱ = b \\ \xrightarrow{(۸,۷)} ۷ = ۸a - ۱ \Rightarrow ۸a = ۸ \Rightarrow a = ۱ \end{cases} \Rightarrow y = x - ۱$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{۳}{۲}x - ۱ & -۲ \leq x \leq ۰ \\ x - ۱ & ۰ \leq x \leq ۸ \end{cases}$$

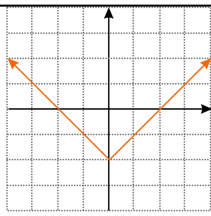
پ) $D = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳\} \qquad R = \{-۳, -۲, ۰, ۱, ۲\}$

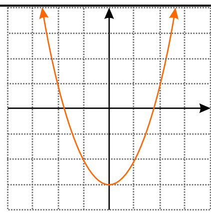
ت) $D = [-۱, ۴] \qquad R = [-۵, ۴]$

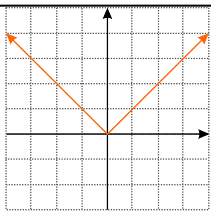
ث) $D = \mathbb{R} \qquad R = (-\infty, ۳]$

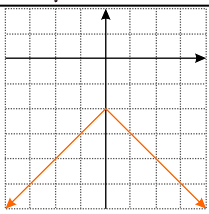
ج) $D = [-۲, ۸] \qquad R = [-۱, ۷]$

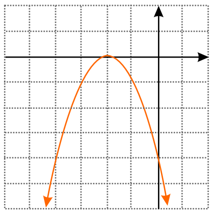
۳۷

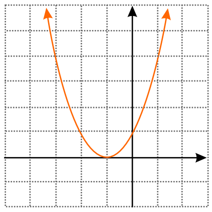

ذ

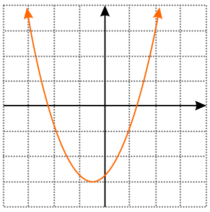

الف

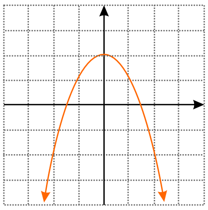

پ

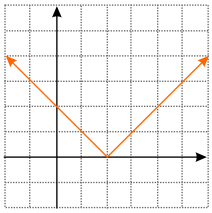

خ

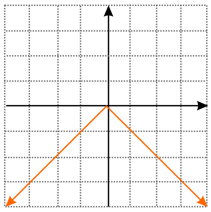

ح

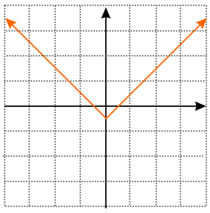

ث

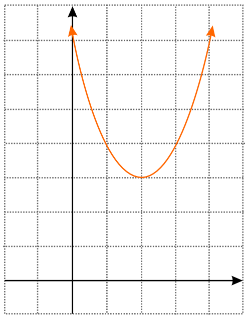

ر


ب


چ


ت


ج


د

تابع	دامنه	برد
الف	$\mathbb{R}$	$[-۳, +\infty)$
ب	$\mathbb{R}$	$(-\infty, ۲]$
پ	$\mathbb{R}$	$[۰, +\infty)$
ت	$\mathbb{R}$	$(-\infty, ۰]$
ث	$\mathbb{R}$	$[۰, +\infty)$
ج	$\mathbb{R}$	$[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$
چ	$\mathbb{R}$	$[۰, +\infty)$
ح	$\mathbb{R}$	$(-\infty, ۰]$
خ	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -۲]$
د	$\mathbb{R}$	$[۳, +\infty)$
ذ	$\mathbb{R}$	$[-۲, +\infty)$
ر	$\mathbb{R}$	$[-۳, +\infty)$

۳۸

$x \leq -۳ \Rightarrow y = -۲$

$$-۳ \leq x \leq -۲ \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(-۳,-۲)} -۲ = -۳a + b \\ \xrightarrow{(-۲,۳)} ۳ = -۲a + b \end{cases}$$

$$-۵ = -a \Rightarrow a = ۵$$

$-۲ = -۳ \times ۵ + b \Rightarrow -۲ = -۱۵ + b \Rightarrow b = ۱۳$

$-۳ \leq x \leq -۲ \Rightarrow y = ۵x + ۱۳$

$$-۲ \le x \le ۲ \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۲,۰)} ۰ = ۲a + b \\ \xrightarrow{(-۲,۳)} \underline{۳ = -۲a + b} \end{cases}$$

$$۳ = ۲b \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

$$۲a + \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲}$$

$$-۲ \le x \le ۲ \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲}$$

$$۲ \le x \le ۳ \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۲,۰)} ۰ = ۲a + b \\ \xrightarrow{(۳,۴)} \underline{۴ = ۳a + b} \end{cases}$$

$$۴ = a$$

$$۲ \times ۴ + b = ۰ \Rightarrow ۸ + b = ۰ \Rightarrow b = -۸ \Rightarrow y = ۴x - ۸$$

$$۲ \le x \le ۳ \Rightarrow y = ۴x - ۸$$

$$f(x) = \begin{cases} -۲ & x \le -۳ \\ ۵x + ۱۳ & -۳ \le x \le -۲ \\ -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲} & -۲ \le x \le ۲ \\ ۴x - ۸ & ۲ \le x \le ۳ \end{cases}$$

$$۲ \le \sqrt{۵} \le ۳ \Rightarrow f(\sqrt{۵}) = ۴\sqrt{۵} - ۸$$

$۶ > ۳ \Rightarrow f(۶) =$ تعریف نشده

$$۳ = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۴ \times ۳ - ۸ = ۱۲ - ۸ = ۴$$

$$-۲ \le \frac{۱}{۲} \le ۲ \Rightarrow f(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = \frac{-۳}{۸} + \frac{۱۲}{۸} = \frac{۹}{۸}$$

$$-۲ \le ۰ \le ۲ \Rightarrow f(۰) = -\frac{۳}{۴} \times ۰ + \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$-۳ \le \frac{-۵}{۲} \le -۲ \Rightarrow f(\frac{-۵}{۲}) = ۵ \times (-\frac{۵}{۲}) + ۱۳ = \frac{-۲۵}{۲} + \frac{۲۶}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

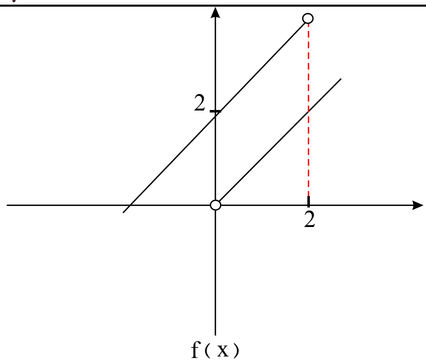
۳۹

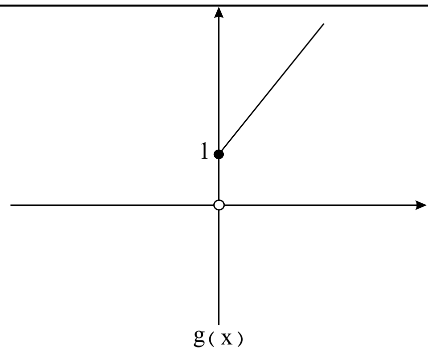
$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۰,۳)} ۳ = b \\ \xrightarrow{(۴,۳)} ۳ = ۴a + ۳ \Rightarrow ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = ۳$$

$$f(x) = ۳ \Rightarrow \begin{cases} f(-۱) = ۳ \\ f(-۴) = ۳ \end{cases}$$

۴۰

$g(x)$، زیرا خطوط موازی محور yها را حداکثر در یک نقطه قطع کرده است.





۴۱

$y = ax^{۲} + bx + c$

$\xrightarrow{(۰,۱)} ۱ = c$

$$\begin{array}{l}\xrightarrow{(۱,-۲)} \\ \xrightarrow{(۲,-۳)}\end{array} \begin{cases} -۲ = a + b + ۱ \\ -۳ = ۴a + ۲b + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶ = ۲a + ۲b \\ -۴ = ۴a + ۲b \end{cases}$$

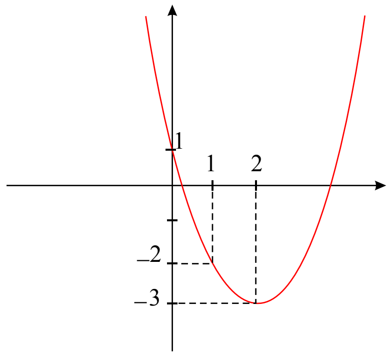
$۲ = ۲a \Rightarrow a = ۱$

$۲a + ۲b = -۶ \xrightarrow{a=۱} ۲ + ۲b = -۶ \Rightarrow ۲b = -۸ \Rightarrow b = -۴$

$y = x^{۲} - ۴x + ۱$

$D = \mathbb{R}$

$R = [-۳, +\infty)$



۴۲

اگر نمایش جبری تابع داده شده باشد، ولی دامنه‌ی آن مشخص نباشد، معمولاً دامنه را، بزرگترین مجموعه‌ی ممکن در نظر می‌گیریم. بعنوان مثال در تابع $f(x) = x^{۲}$، دامنه را مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

باتوجه به نکته‌ی فوق نمایش الف برای تابع درست است.

دقت کنید که تمام نمایش‌های فوق در دامنه‌های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی برای $f(x) = x^{۲}$ صحیح هستند اما از آنجا که دامنه مشخص نشده طبق نکته، نمایش الف درست است.

۴۳

$y = ax^{۲} + bx + c$

$(۰, -۳):\ -۳ = c$

$(۱, -۴): a + b - ۳ = -۴ \Rightarrow a + b = -۱ \Rightarrow ۲a + ۲b = -۲$

$(۲, -۳): ۴a + ۲b - ۳ = -۳ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۰$

$$\begin{cases} ۲a + ۲b = -۲ \\ ۴a + ۲b = ۰ \end{cases}$$

$-۲a = -۲ \Rightarrow \boxed{a = ۱}$

$۲a + ۲b = -۲ \Rightarrow ۲ + ۲b = -۲ \Rightarrow ۲b = -۴ \Rightarrow \boxed{b = -۲}$

$y = x^{۲} - ۲x - ۳$

دامنه $= \mathbb{R}$

برد $= [-۴, +\infty)$