فصل ششم ریاضیات یازدهم تجربی :

حد و پیوستگی

بهتره در ابتدا با شکل تعریف ریاضیاتی حد آشنا بشیم و بعد در موردش مفصل با هم حرف بزنیم :

میگوییم ، حد تابع $f(x)$ رو وقتی که x به سمت عدد حقیقی a میل میکند یعنی :

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

حتما میپرسی میل کردن یعنی چی ؟

خیلی ساده است :

میل کردن یعنی : خیلی نزدیک شدن . یا شایدم به عبارت بهتر ، خیلی خیلی به یک نقطه نزدیک شدن رو میگیم میل کردن . مثلا وقتی میگیم $x \to a$ یعنی x خیلی خیلی به a (که a هر عدد حقیقی دلخواهی میتونه باشه) نزدیک است .

حالا حتما میپرسی آیا از جهت و سمت خاصی $x \to a$ نزدیک میشه ؟ باید در جوابت بگم بله ...

x همیشه از دو جهت به عدد حقیقی دلخواهی مثل a نزدیک میشه : از سمت راست و یا از سمت چپ .

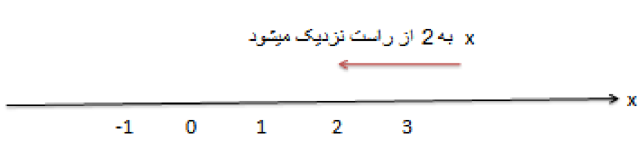
پس الان میدونیم که برای محاسبه حد دو نوع میل کردن وجود داره :

1) میل کردن از سمت راست : وقتی مینویسیم $x \to a^+$ یعنی x از سمت راست داره به a خیلی خیلی نزدیک میشه . یا به عبارت خیلی بهتر باید بگیم x با مقادیر بیشتر از a به a نزدیک میشه . پس اگه مثلاً دیدی $x \to 1^+$ یعنی x با مقادیر بیشتر از 1 به 1 نزدیک میشه ، پس x مقدارهایی مثل 1/1 و 1/01 و ... داره و به سمت 1 نزدیک میشه .

2) میل کردن از سمت چپ : وقتی مینویسیم $x \to a^-$ یعنی x از سمت چپ داره به a خیلی خیلی نزدیک میشه . یا به عبارت خیلی بهتر باید بگیم x با مقادیر کمتر از a به a نزدیک میشه . پس اگه مثلاً دیدی $x \to 1^-$ یعنی x با مقادیر کمتر از 1 به 1 نزدیک میشه ، پس x مقدارهایی مثل 0/1 و 0/01 و ... داره و به سمت 1 نزدیک میشه .

به مثال زیر دقت کن :

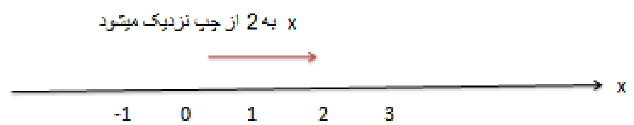
مثال



روی محور اعداد $x \to 2^+$ را به صورت مقابل نمایش میدهیم:

مثال

روی محور اعداد $x \to 2^-$ را به صورت مقابل نمایش میدهیم:



نتیجه

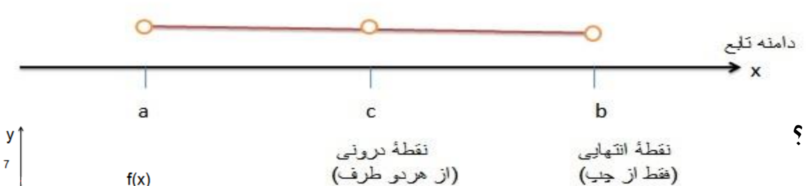
الان دیگه میدونیم که وقتی مینویسیم $x \to 2^+$ یعنی داریم **حد راست** رو محاسبه میکنیم و وقتی مینویسیم $x \to 2^-$ یعنی داریم **حد چپ** رو محاسبه میکنیم .

نکته مهم

وقتی x از چپ یا راست به a میل میکند ، هرگز به خودِ a نمیرسد . یا به عبارت بهتر باید بگم در بررسی حد تابع ها ، ما هیچ کاری به خودِ نقطهٔ a نداریم .

نکته مهم

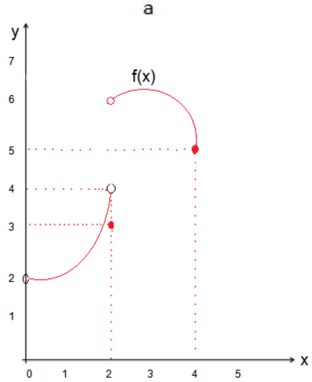
در نقطهٔ شروع دامنه ، x فقط میتواند از راست به a میل کند ، چون از طرف چپِ a تابعی وجود ندارد. در نقطه پایانی دامنه هم x فقط میتواند از چپ به a میل کند چون از سمت راست b تابعی وجود ندارد. به شکل زیر دقت کن تا منظورمو بهتر متوجه بشی :



حالا حتما میپرسی چرا هر سه نقطهٔ c و b و a تو خالی هستند ؟

یادته که توی دو نکته قبل گفتم ما موقع بررسی حد به خودِ نقطه کاری نداریم.

حد تابع : به شکل زیر نگاه کن ، تا با هم مفهوم حد تابع رو یاد بگیریم :



با توجه به شکل مقابل ، میتونیم بگیم : حدِ تابع یعنی مقدارِ نهاییِ شاخه های نمودار در آن نقطه.

در نقطه $(0,2)$ که $x = 0$ دامنه تابع شروع میشه . در این نقطه فقط شاخهٔ سمت راست را داریم . در این صورت مقدار نهایی عرض (y) یا همان $f(x)$ در شاخهٔ سمت راست ، وقتی به سمت $x = 0$ (از سمت راست به 0 نزدیک میشویم) به 2 میرسد ، پس باید به زبان ریاضیات بنویسیم :

$$lim_{x \to 0} f(x) = lim_{x \to 0^+} f(x)$$

نکته مهم

چون در نقطه $x = 0$ نقطهٔ تو پُر نداریم ، $f(0)$ وجود نداره و تابع در این نقطه نا معین است . اما این موضوع هیچ ربطی به حد این تابع نداره .

در $x = 2$ که نقطه ای درون دامنهٔ تابع هست . هم شاخهٔ سمت راست داریم و هم شاخهٔ سمت چپ .

در این نقطه باید دقت کنیم که به ازای $x = 2$ دو مقدار برای (y) یا همان $f(x)$ وجود داره که وقتی از سمت چپ به 2 نزدیک میشیم $f(x)$ نهایتاً به 4 میرسه و وقتی از راست به 2 نزدیک میشیم $f(x)$ نهایتاً به 6 میرسه.

یعنی داریم :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$ حد چپ

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 6$$ حد راست

نکته مهم

لازمه به نقطهٔ تو پُر $x = 2$ $\leftarrow$ $f(2) = 3$ دقت کنیم چون این نقطه دقیقاً مقدار تابع به ازای $x = 2$ هستش و هیچ ربطی به حد نداره .

$x = 4$ نقطهٔ پایانی دامنه است.در این نقطه فقط شاخهٔ سمت چپ داریم . مقدار $f(x)$ وقتی که $x = 4$ نهایتاً به ۵ میرسه . پس دیگه الان سریع مینویسیم

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 5$$

در این تابع خودِ $f(4)$ هم برابر 5 است (این موضوع رو از نقطهٔ تو پُر فهمیدیم) .

تا الان با مفهوم حد آشنا شدیم . البته با توجه به مطالبی که در درس اول فصل ششم کتابتون مشاهده کردم بهتره کمی موضوع رو ریاضی مطرح کنیم.

اول به مثال زیر دقت کن .

مثال

حاصل حد زیر را بیابید ؟

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} (x^2 + 1)[-x]$$

جواب : حتما با دیدن این سوال خیلی نگران شدی ... اول باید مشکل جزء صحیح رو حل کنیم . حتما میپرسی چطوری ؟ با تابع جزء صحیح آشنایی داری و میدونی که $[-x] \xrightarrow{\sqrt{2}=1/41} [-\sqrt{2}] = [-1/41]$ که بین -1 و -2 قرار میگیره . یعنی $-2 < -1.4 < -1$.یادمونه که $[-1.4] = -2$ (یعنی کوچکترین عدد نزدیک به -1.4 رو باید در نظر بگیریم. دیگه مشکل سوال حل شد کافیه که در تابع داده شده هرجا که x میبینی به جاش بزاریم $\sqrt{2}$. یعنی :

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+1)[-x] = \lim_{x\to\sqrt{2}}(\underbrace{(\sqrt{2})^2+1}_{2+1})\,[\underbrace{-\sqrt{2}}_{-2}] = (2+1)(-2) = 3\times(-2) = -6$$

دیدی چقدر جواب کوتاه و ساده بود ؟ فقط یه نکته کوچولو در مورد تشخیص مقدار داخل جزء صحیح بود.

حالا حد رو بهتر و کاملتر تعریف میکنیم :

یادآوری

در ابتدا باید بدونی که حد برای توابع قابل استفاده است و تا به الان بارها به شکلهای مختلف با تابع و انواعش آشنا شدی.قبل از آشنایی با تابع با حل معادله ها و نامعادله ها ، با ضابطه ها در قالب حل معادله آشنا شده بودی . البته باید این رو هم بگم که بین تابع و (معادله و نا معادله) یک تفاوت وجود داره: تفاوت بین تابع و (معادله ها و نا معادله ها) اینه که در حل توابع ما هر مقدار دلخواهی رو به x میدادیم و y نظیرش رو به دست میاوردیم اما در حل معادله ها و نا معادله ها باید مقدار مجهول x رو پیدا میکردیم که ممکن بود این مقدار منحصر به فرد باشه و یا چند تا جواب داشته باشه . الان دیگه یادت میاد که برای یادگیری تابع اول لازم بود معادله ها و نا معادله ها رو می آموختی و بعدش تابع و انواعش رو به خوبی آموختی (اگر احساس میکنی لازمه که بازم مبحث تابع رو مرور بکنی بهتره جزوه فصل تابع دهم و یازدهم رو مطالعه بکنی) . خب تا الان توابع (خطی ، گویا ، رادیکالی ، قدر مطلق ، جزء صحیح ، مثلثاتی و توابع درجه دوم) و بارها روشهای تجزیه و ساده کردن توابع رو خوندی و مورد استفاده قرار دادی مثل فاکتور گیری و اتحادها و تقسیم ها و مخرج مشترک گرفتن ها و استفاده از طرفین وسطین و ... البته محاسبه دامنه و برد توابع رو هم خوندی .تمام اینها رو گفتم که بدونی همشون در این فصل به کمکت میان پس یادت نره برای یادگیری هرچه بهتر این فصل لازمه که دفترچه خاطرات ریاضیات سالهای قبلت رو بارها با هم ورق میزنیم. البته برای اینکه دانش آموزانی که پایهٔ ریاضیاتشون قوی هست رو خسته نکنیم از هر مبحث من فقط یک مثال یا نهایتاً دو مثال رو بازِ باز میکنم و انتظار دارم باقی مثالها رو خودت مرحله به مرحله حل بکنی .

تعریف ریاضی حد:

$$\forall\, a,b \in \mathbb{R}\ \lim_{x\to a} f(x) = l$$

این تعریف به ما میگه که به ازای هر $a,b \in \mathbb{R}$ که $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است اگر $x \to a$ خیلی خیلی نزدیک میشه باید $f(x)$ به l خیلی خیلی نزدیک بشه. البته به این نکته دقت کن که همانطور که x هیچوقت به a نمیرسه $f(x)$ هم هیچوقت به l نمیرسه .

حد چپ و راست :

$$\text{حد چپ} \rightarrow \forall\, b,a \in \mathbb{R}\ \lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

$$\text{حد راست} \rightarrow \forall\, a,c \in \mathbb{R}\ \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

نکته مهم

زمانی یک تابع حد داره که دو شرط اساسی زیر برقرار باشد :

1) حد چپ و راست تابع در یک نقطه باهم برابر باشند. یعنی :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

2) حد چپ و راست تابع باید با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشن یعنی :

$$\underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x)}_{\text{حد چپ}} = \underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x)}_{\text{حد راست}} = \underbrace{f(a)}_{\text{مقدار تابع در نقطه } a} = l$$

خب الان میدونی که $f(a)$ یعنی در تابع $f(x)$ هرجا که x دیدی مقدار حقیقی a رو باید بزاریم .

نکته مهم از حالا به بعد باید به شکل تابعی که در سوالات بهت میدن دقت بکنی. یعنی اگه توی تست یا سوال تشریحی که بهت میدن $lim_{x\to a} f(x)$ حد تابعی رو خواستن که قدر مطلق یا جزء صحیح داشت اول باید تکلیف قدرمطلق یا جزء صحیح و یا هردوشون رو مشخص بکنی و بعد $x = a$ رو داخل تابع قرار بدی.

یادآوری میدونیم که حاصل $|u|$ میشه خودِ u یا $-u$ ، این به علامت u بستگی داره .اگر $u > 0$ باشه قدرمطلقش برابر با خودش میشه ولی اگر $u < 0$ باشه قدرمطلقش میشه $-u$

مثال حد تابع $|\cos x|$ را وقتی که $x \to (\frac{\pi}{2})^+$ محاسبه کنید؟

جواب : میدونیم که $\frac{\pi^+}{2} < \frac{\pi}{2}$ پس $\frac{\pi^+}{2}$ در ربع دوم قرار میگیره و در ربع دوم $\cos x$ منفی ست و به جای $|\cos x|$ باید $-\cos x$ رو قرار بدیم . یعنی :

$$lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}|cos\, x| = lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(-cos\, x) = lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(-\underbrace{cos\frac{\pi^+}{2}}_{0^+}) = -0^+ = 0^-$$

مثال حد $|x^2 - x - 2|$ وقتی که $x \to (-1)^-$ محاسبه کنید ؟

جواب : اول باید علامت $|x^2 - x - 2|$ رو مشخص بکنیم :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x به سمت -1 با مقادیر کمتر میرود. پس x از -1 کمتر است و با توجه به جدول ، داخل قدرمطلق مثبت میشود . پس به جای $|x^2 - x - 2|$ میتونیم قدرمطلق رو حذف کنیم و $x^2 - x - 2$ رو قرار میدیم .

نکته مهم

حاصل $[u]$ همیشه یک عدد ثابت است . در مبحث تابع فهمیدیم که جزء صحیح هر عدد دلخواه مثل u وقتی که $n \le u < n+1$ برابر میشه با n . پس در $\lim_{x\to 2^-} x[x]$ به جای $[x]$ باید $[x] \to [2^-] = 1$ را قرار بدیم . چون 2^- از 2 کمتر است پس جزء صحیح آن برابر با یک میشود یعنی چون $1 \le 2^- < 2$ داریم :

$$[x] \to [2^-] = 1$$

هیچوقت نمیتونیم از ضابطه هایی که دارای دامنه هایی شبیه $x = 2$, $x^2 = x$, $|x| = 2$, $x \in Z$ و ... حد بگیریم . چون دامنه این ضابطه ها یک یا چند نقطهٔ جدا از هم دارند و نمودار این ضابطه ها در یک یا چند نقطه از هم جدا میشود .

حالا برای اینکه متوجه بشی که مطالبی که من گفتم با مطالب کتابت فرقی نمیکنه تعاریف داخل کتابت رو خیلی کوتاه با هم مرور میکنیم و بعدش چندتا مثال رو با هم حل میکنیم.

صفحه 6 از فصل 6 کتابت میگه :

فرض کنیم تابع f در بازه ای مانند $(a\,, x_0)$ تعریف شده باشد (یعنی $D_f = (a\,, x_0)$ دامنه تابع f برابر با $(a\,, x_0)$ باشه) گوییم حد چپ f در x_0 برابر با عدد l است . هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد ، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود در این صورت مینویسیم :

$$\lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = l$$

فرض کنیم تابع f در بازه ای مانند $(a\,, x_0)$ تعریف شده باشد (یعنی $D_f = (x_0\,, b)$ دامنه تابع f برابر با $(x_0\,, b)$ باشه) گوییم حد راست f در x_0 برابر با عدد l است . هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد ، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود در این صورت مینویسیم :

$$\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = l$$

فرض کنیم تابع f در بازه ای مانند $(a\,,b)$ تعریف شده باشد (یعنی $D_f = (a\,,b)$ دامنه تابع f برابر با $(a\,,b)$ باشه و $x_0 \in (a,b)$) گوییم حدتابع f در x_0 برابر با عدد l است . هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد ، به شرط آنکه x از دو طرف (راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود در این صورت مینویسیم :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

نکته مهم این نکته مهمترین تعریف برای وجود حد یک تابع در یک نقطه است . که بیان میکند : حد یک تابع در نقطه ای مثل x_0 زمانی وجود دارد که حد چپ و راست این تابع در این نقطه وجود داشته باشد و حد چپ و راست این تابع با هم برابر باشند یعنی :

$$lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \leftrightarrow \quad lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \quad \text{و} \quad lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

مثال حد چپ و راست تابع زیر را در نقطه $x = 2$ بیابید و بگویید آیا این تابع در نقطه داده شده حد دارد یا نه ؟چرا ؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x > 2 \\ \sqrt{7+x} & 0 < x < 2 \end{cases}$$

جواب : خیلی واضحه که باید حد راست را از ضابطه بالایی و حد چپ را از ضابطه پایین محاسبه کنیم .

حد راست : میدونیم که 2^+ از مقادیر بیشتر از 2 به 2 نزدیک میشه پس داریم :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$$

حد چپ : میدونیم که 2^- از مقادیر کمتر از 2 به 2 نزدیک میشه پس داریم :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{7+x} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$$

خب اگه کمی دقت کنیم میبینیم حد چپ و راست این تابع با هم برابر نیست یعنی $1 \neq 3$ پس این تابع در کل طبق نکته مهم فوق حد ندارد .

مثال

این بار تمرین 8 صفحه 9 فصل 6 کتابتون رو حل میکنیم : آیا حد تابع زیر در نقطه $x=2$ موجود است ؟

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & x>2\\ -2 & x=2\\ x-3 & x<2\end{cases}$$

حد راست : در نگاه اول میفهمیم که باید حد راست را از ضبطه اول محاسبه کنیم یعنی $x>2$ چون x از مقادیر بزرگتر از 2 به سمت 2 نزدیک میشه :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -x+2=-2+2=0$$

حد چپ : باید حد چپ را از ضبطه سوم محاسبه کنیم یعنی $x<2$ چون x از مقادیر کوچکتر از 2 به سمت 2 نزدیک میشه :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x-3=2-3=-1$$

از ضابطه دوم هم مشخصه که $f(2)=-2$ پس کاملا مشخصه حد این تابع موجود نیست چون طبق نکته قبل حد چپ و راست تابع داده شده نه تنها با هم برابر نیستن بلکه هیچکدومشون با $f(2)=-2$ هم برابر نیستن یعنی :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \quad \neq \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=-1 \quad \neq \quad f(2)=-2$$

برای اینکه جزوه درس دوم این فصل کوتاهتر بشه و بتونیم مثال هم حل بکنیم من درس دوم این فصل رو در قالب چند قضیه به شما آموزش میدم :

قضیه های حد :

حد تابع ثابت : به طور کلی اگر b و a دو عدد حقیقی باشند(یعنی $a,b\in R$) داریم :

$$\lim_{x\to a} b=b$$

با داشتن حد توابع g و f در $x=a$ میتوانیم حد تابع های ترکیبی را هم محاسبه کنیم . یعنی اگر حدهای زیر موجود باشند

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

خواهیم داشت :

1) حد حاصل جمع دو تابع f و g به صورت زیر محاسبه میشود :

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

2) حد حاصل تفریق دو تابع f و g به صورت زیر محاسبه میشود :

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$

3) حد حاصل ضرب دو تابع f و g به صورت زیر محاسبه میشود :

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\times g(x)\big) = \lim_{x\to a} fg(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \times L_2 = L_1 L_2$$

تمامی شکلهایی که از حاصلضرب دو تابع نوشتم با هم برابر هستند . برای اینکه نگران شکل نوشتاری حد حاصلضرب دو تابع نباشی تمامی صورتهای نوشتاری ممکن رو برات نوشتم . لازم نیست تمامی این فرم نوشتاری برای حاصلضرب دو تابع بنویسی فقط کافیه بدونی که برای این قضیه چندین فرم نوشتاری وجود داره که میتونی از بینشون یکیو انتخاب بکنی .

4) حد حاصل تقسیم دو تابع f و g به صورت زیر محاسبه میشود :

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

شرط برقراری $\rightarrow L_2 \neq 0$

5) حد درجهٔ n ام تابع $f(x)$ به صورت زیر محاسبه میشود :

$$\lim_{x\to a} (f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n = {L_1}^n \qquad (n \in N)$$

6) حد ریشه k ام تابع $f(x)$ به صورت زیر محاسبه میشود :

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[k]{L_1}$$

نکته مهم خیلی دقت کن که برای k های زوج (رادیکال با فرجه زوج) باید $L_1 \geq 0$ باشد.

قضیه زیر خیلی مهم و کاربردیه ولی ممکنه امسال از این قضیه استفاده نکنی بخاطر همین این قضیه رو برات مینویسم اما خیلی روش تأکید نمیکنیم . سال آینده قطعا با این قضیه مهم آشنا میشی .

7) قضیهٔ فشردگی : اگر $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و حد توابع h و g در $x = a$ با هم برابر باشند ، حد f هم با آنها مساوی خواهد بود . یعنی داریم :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \xrightarrow{\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L} \lim_{x\to a} f(x) = L$$

نکته مهم

هروقت در زندگی یک نامساوی سه تایی دیدی ، یاد قضیهٔ فشردگی بیوفتید . ضمنا حتما به این نکته دقت کن که زمانی میتونی از قضایای حد استفاده بکنی که حد هر دو تابع به یک نقطه میل کنند.

نکته مهم

به طور کلی حد یک تابع چند جمله ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است .

مثال

اگر $\lim_{x\to1} \mathrm{f(x)} = 3$ و $\lim_{x\to1} \mathrm{g(x)} = 2$ آیا تساوی زیر برقرار است ؟

$$\frac{3g(x) + 4}{5} = \sqrt{f(x) + 1}$$

جواب : چون حد $f(x)$ برابر است با 3 پس حد $\lim_{x\to1} \sqrt{\mathrm{f(x)} + 1} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$ و همینطور برای $\lim_{x\to1} g(x) =$ 2 داریم

$$\frac{3g(x) + 4}{5} = \frac{(3 \times 2) + 4}{5} = \frac{6 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\underbrace{\frac{3g(x) + 4}{5}}_{2} = \underbrace{\sqrt{f(x) + 1}}_{2} \to 2 = 2$$

پس تساوی فوق برقرار است .

مثال

حاصل حد زیر را بیابید؟

$$\lim_{x\to1} \frac{1 - \sqrt{2\mathrm{x} - 1}}{\mathrm{x}^3 - 1}$$

جواب : میدونیم که طبق قضایای حد که پیش از این مطرح شدن ، میتونیم حد صورت و مخرج کسر رو به صورت جداگانه محاسبه کنیم .

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{x^3-1}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}1-\sqrt{2x-1}}{\lim_{x\to1}x^3-1}$$

حدِ صورت $$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}1-\sqrt{2x-1}=1-\sqrt{(2\times1)-1}=1-\sqrt{2-1}=1-1=0$$

حدِ مخرج $$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}x^3-1=1^3-1=0$$

با توجه به جوابهای به دست آمده کاملا مشخصه که صورت و مخرج کسر برابر با 0 شد و در حال حاضر به

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}1-\sqrt{2x-1}}{\lim_{x\to1}x^3-1}=\frac{0}{0}$$

رسیدیم ، که یک نتیجه مبهم برای حد است . یادته گفتم که چون تا به امروز انواع تابع و دامنه توابع و همچنین روشهای ساده کردن توابع مثل گویا کردن ، تجزیه ، اتحادها ، فاکتورگیری و دلتا و مخرج مشترک گیری و ... رو خوندی باید آمادگی استفاده از اونها رو داشته باشی ؟ الان دقیقا برای حل این سوال باید دفترچه خاطرات ریاضی سالهای قبلتو باهم ورق بزنیم. پاسخ به این سوال خیلی راحت و شیرینه فقط مکی دقت و حضور ذهن لازم داره .

الان دیگه میدونی که اگه به جوابی مشابه $\frac{\text{عدد}}{0}$ یا $\frac{0}{0}$ رسیدی جواب به دست آمده یک جواب مبهمه که باید برای تغییرش از روشهای ساده کردن استفاده بکنیم . البته حالتهای مبهم دیگری هم برای حد وجود داره که سال آینده با آنها آشنا میشی.

برای تغییر پاسخ حد در صورت کافیه که صورت و مخرج کسر رو در مزدوج صورت ضرب کنیم (یعنی گویا کردن) و خیلی واضحه که مخرج کسر هم میتونیم با استفاده از اتحاد چاق و لاغر باز کنیم.

پس داریم :

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}1-\sqrt{2x-1}}{\lim_{x\to1}x^3-1}\to\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{x^3-1\xRightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}}}=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

بعد از تبدیل مخرج کسر به اتحاد چاق و لاغر کافیه که صورت و مخرج کسر رو در مزدوج صورت ضرب کنیم

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{2x-1}}{(x-1)(x^2+x+1)}\times\frac{1+\sqrt{2x-1}}{1+\sqrt{2x-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{2x-1})\times 1+\sqrt{2x-1}}{(x-1)(x^2+x+1)\times(1+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1^2-(\sqrt{2x-1})^2}{(x-1)(x^2+x+1)\times(1+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-(2x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)\times\left(1+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)\times(1+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2x+2}{(x-1)(x^2+x+1)\times(1+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)\times(1+\sqrt{2x-1})}$$

حالا میتونیم عامل صفر کننده کسر که همون $(x-1)$ هستش رو از صورت و مخرج کسر باهم بزنیم

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)\times(1+\sqrt{2x-1})}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x^2+x+1)(1+\sqrt{2x-1})}=\frac{-2}{\underbrace{(1^2+1+1)}_{3}\underbrace{\left(1+\sqrt{(2\times1)-1}\right)}_{1+1=2}}=\frac{-2}{3\times2}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

نباید پاسخ سوال رو تا این اندازه باز میکردم اما اینکار رو برای این انجام دادم که بدونی جواب این سوال فقط و فقط بازی ریاضیه . جواب خیلی ساده است و این که جواب رو طولانی میبینی فقط بخاطر اینه که تمامی مراحل حل رو حتی ساده کردنها در این پاسخ باز شده . انتظار دارم از این پس دیگه خودت بتونی پاسخ سوالات رو باز کنی .

حاصل حد زیر را بیابید ؟

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin(x+\pi)}$$

جواب : کافیه که توی عبارت داده شده هرجا که x دیدی به جاش صفر بزاری . یعنی :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin(x+\pi)}=\frac{\sqrt{1-\cos(2\times 0)}}{\sin(0+\pi)}=\frac{\sqrt{1-\cos 0}}{\sin\pi}=\frac{\sqrt{1-1}}{0}=\frac{0}{0}$$ مبهم

برای رفع ابهام باید از اتحادهای مثلثاتی استفاده کنیم . یعنی :

میدونیم که :در صورت کسر $1-\cos 2x = 2\sin^2\mathrm{x}$ و $\sqrt{2sin^2x}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sin^2\mathrm{x}}=\sqrt{2}\times|\mathrm{sinx}|$ چون طبق قاعده قدرمطلق $\sqrt{a^2}=|a|$ و (در مخرج $\sin(x+\pi)=\sin(\pi+x)=-\sin\mathrm{x}$ چون کمان در ربع سوم قرار دارد و سینوس در این ربع منفی است.) ضمن اینکه با توجه به اینکه $x\to 0^-$ باید بدونیم که x از مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک میشه که در ربع چهارم می افته و در این ربع سینوس منفیه . پس قدرمطلق در صورت کسر با علامت منفی برداشته میشه یعنی $\lim_{x\to 0^-}|\sin x| = (-\sin x)$

حالا کافیه که نتایج زرد رنگ رو داخل صورت سوال قرار بدیم . یعنی :

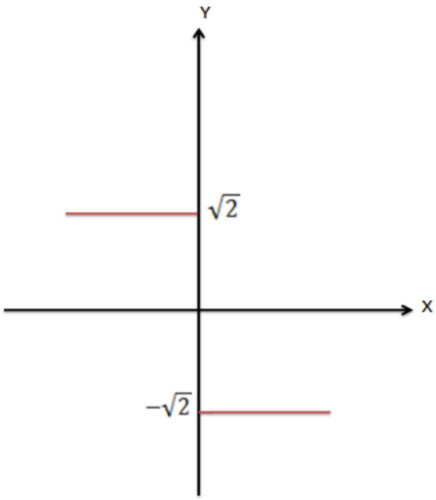
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}\to}{\sin(x+\pi)\to}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2sin^2x}}{-sinx}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2\times sin^2x}}{-sinx}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{sin^2x}}{-sinx}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\times|\sin x|}{-\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\times(-\sin x)}{-\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

نکته مهم

میدونیم که حد $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin(x+\pi)}$ وجود ندارد . چون حد چپ این تابع $\sqrt{2}$ و حد راست این تابع با $-\sqrt{2}$ برابر میشه .

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}\to}{\sin(x+\pi)\to}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2sin^2x}}{-sinx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2\times sin^2x}}{-sinx}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{sin^2x}}{-sinx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\times|\sin x|}{-\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\times(\sin x)}{-\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$$

نمودار این تابع در اطراف $x = 0$ به شکل زیر است :



مثال

حدهای زیر را محاسبه کنید ؟

الف) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

ب) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$

جواب الف : کافیه که توی صورت سوال هرجا کهx دیدی به جاش 3 قرار بدی.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9} \to \lim_{x\to 3}\frac{3^2-(3\times 3)}{3^2-9} = \frac{9-9}{9-9} = \frac{0}{0} \qquad \text{مبهم}$$

حالا برای رفع ابهام باید دفترچه خاطراتتو ورق بزنیم . الان بهترین راه برای رفع ابهام استفاده از اتحادهاو فاکتورگیری است :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x^2-3^2} = \lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3} = \frac{3}{3+3}$$
$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

جواب ب: کافیه که توی صورت سوال هرجا کهx دیدی به جاش -2 قرار بدی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(-2)^3+8}{-2+2} = \frac{-8+8}{0} = \frac{0}{0} \qquad \text{مبهم}$$

حالا باید با استفاده از اتحادها رفع ابهام رو انجام بدی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2^3}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim_{x\to -2}x^2-2x+4$$
$$=(-2)^2-2(-2)+4=4+4+4=12$$

پیوستگی :

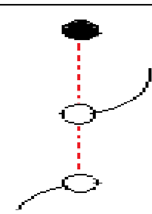
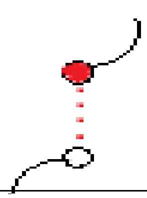
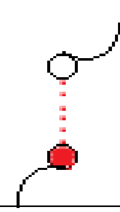
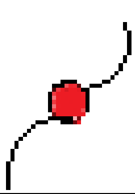
برای آموزش هرچه بهتر این مبحث بهتره در ابتدا بتونیم پیوستگی رو از روی نمودار تشخیص بدیم . تا اینجا ما به خود نقطه کاری نداشتیم و فقط اطراف نقطه مورد نظر رو بررسی میکردیم . اما از حالا به بعد با مقدار تابع در نقطه مورد نظر هم سروکار داریم. اگه خیلی خیلی ساده بخوام بگم باید به این شکل حد و پیوستگی رو تعریف کنیم.

وقتی از حد یک تابع حرف میزنیم برای ما خود نقطه مد نظر نیست و فقط تلاش میکنیم x را از مقادیر کمتر یا بیشتر از a به a نزدیک بکنیم و در نتیجه بفهمیم به ازای $x\to a^{\pm}$ ، تابع $f(x)$ یا همون y به چه عددی نزدیک میشه . یعنی دقیقا همون حل معادله است که ما در اینجا مقدار x رو داریم و داخل ضابطه تابع قرارش میدیم و $f(x)$ یا به عبارت بهتر y رو به دست میاریم. به عنوان نمونه برای مثال فوق قسمت الف :

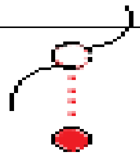
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{x^2-3^2}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}=\frac{3}{3+3}$$
$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

میگیم به ازای $x\to 3$ در تابع فوق $f(x)\to\frac{1}{2}$. یعنی وقتی x به سمت 3 نزدیک میشه (میل میکنه) y یا همون $f(x)$ به سمت $\frac{1}{2}$ نزدیک میشه (میل میکنه) .

در مورد پیوستگی ما به خود نقطه هم نیاز داریم و حالا باید به سراغ خود نقطه هم برویم . یعنی علاوه بر حد تابع به مقدار آن هم نیاز داریم .به تصاویر زیر توجه کن .

الف) تابع حد ندارد و مقدار آن با حد چپ یا راست مساوی نیست . 	ب) تابع حد ندارد و مقدار آن با حد راست برابر است . 
ج) تابع حد ندارد و مقدار آن با حد چپ برابر است 	د) تابع حد دارد و مقدار آن با حد برابر است 

ه) تابع حد دارد ، اما مقدار آن با حد برابر نیست



نکته مهم : پیوستگی یعنی نمودار یک تکه باشد و بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم شود . در نمودار باید نقطهٔ توپُر در همان محلی باشد که شاخه های چپ و راست به هم رسیده اند . به زبان ریاضی ، شرط پیوستگی این است که

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

یعنی حد یک تابع باید با مقدار آن تابع مساوی باشد . به بیان کاربردی تر ، حد چپ و راست و مقدار تابع باهم برابر باشند .

با توجه به جدول فوق ،

تابع الف : در نقطهٔ مشخص شده ، ناپیوسته است چون مقدار تابع با حد چپ و راست برابر نیست.

تابع ب : فقط از راست پیوسته است (یعنی پیوستگی یکطرفه دارد) ، چون نقطهٔ توپُر به شاخهٔ سمت راست متصل شده . به بیان دیگر حد راست با مقدار تابع برابر است . یعنی :

$$\text{پیوستگی راست} \leftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

تابع ج : فقط از چپ پیوسته است (یعنی پیوستگی یکطرفه دارد) ، چون نقطهٔ توپُر به شاخهٔ سمت چپ متصل شده . به بیان دیگر حد چپ با مقدار تابع برابر است . یعنی :

$$\text{پیوستگی چپ} \leftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

تابع د : کاملاً پیوسته است . یعنی هم از چپ و هم از راست پیوستگی دارد (پیوستگی دو طرفه) و مقدار تابع با حد چپ و راست برابر است . یعنی :

$$\text{پیوستگی دو طرفه} \leftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

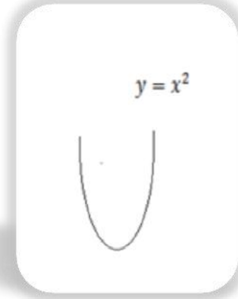
تابع ه : این تابع حد دارد چون حد چپ و راست آن باهم مساوی است اما از هیچ طرفی پیوسته نیست ، یعنی :

$$\text{پیوستگی ندارد} \leftrightarrow f(a) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

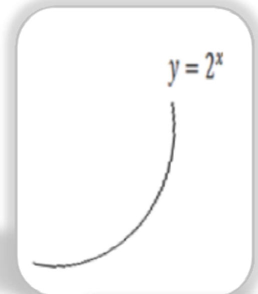
در این تابع میتوانیم $f(a)$ را برابر حد تابع تعریف کنیم ، آن وقت تابع پیوسته میشود .

شکل توابعی که تابحال شناخته ایم را ببین :

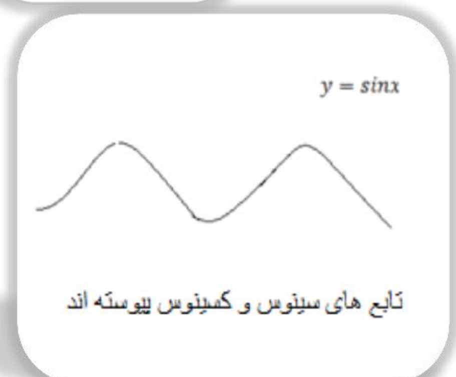
الف) تابع درجه دوم و هر تابع چندجمله ای پیوسته است : مثل $y = x^2$



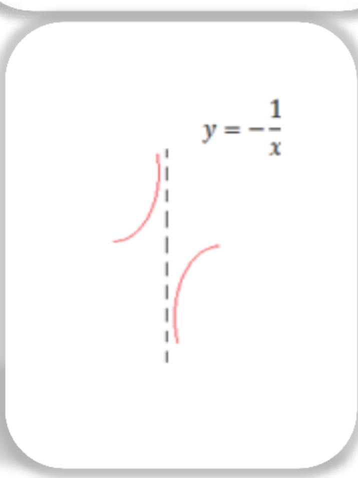
ب) تابع نمایی و لگاریتمی پیوسته اند : مثل $y = 2^x$



ج) توابع سینوس و کسینوس پیوسته اند : مثل $y = sinx$

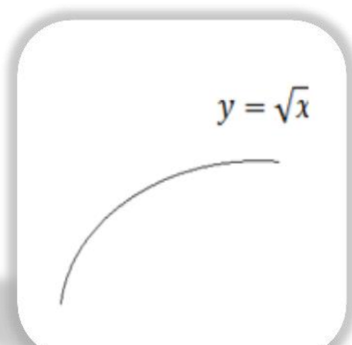


د) توابع کسری در دامنهٔ خود پیوسته اند : مثل $y = -\frac{1}{x}$

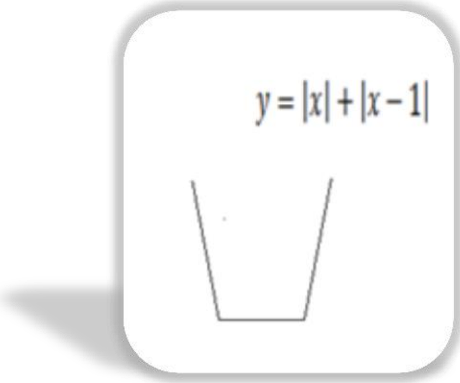


ه) توابع گنگ (رادیکالی) در نقاط داخلی (غیر منفرد)

دامنه خود پیوسته اند : مثل $y = \sqrt{x}$



و) توابع قدرمطلقی پیوسته اند : مثل $y = |x| + |x-1|$



با یک مثال مطالب رو بهتر یاد میگیری :

مثال

به ازای چه مقادیری از k تابع زیر بر کل R پیوسته است ؟

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - k}$$

جواب : قبل از پاسخ به این سوال به یادآوری زیر توجه کن :

یادآوری

میدونیم که برای محاسبه دامنه یک تابع رادیکالی باید به دو شرط مهم توجه کنیم :

شرط اول : فرجه رادیکال : اگه فرجه زوج باشه حتما باید عبارت زیر رادیکال رو بزرگتر از صفر قرار بدیم.مثلا برای $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ حتما باید عبارت زیر رادیکال از صفر بزرگتر درنظر گرفته بشه چون $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{دامنه تابع}} \sqrt{x} > 0$ توی مخرج قرار داره حتی نباید مخرج کسر برابر صفر بشه چ.ن کسری که مخرج آن صفر باشه تعریف نشده است یا به عبارت بهتر چنین کسری وجود نداره. البته فرجه زوج رادیکال هم به ما میگه هیچ عدد منفی نمیتونه زیر این رادیکال قرار بگیره .

اما برای $y = \sqrt{x}$ عبارت زیر رادیکال رو بزرگتر مساوی صفر قرار میدیم چون در این نمونه بخاطر وجود فرجه زوج هیچ عدد منفی زیر رادیکال قرار نمیگیره اما میشه که عبارت زیر رادیکال برابر صفر بشه یعنی $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{دامنه تابع}} \sqrt{x} \geq 0$

اما برای توابع رادیکالی با فرجه فرد میدونیم که دامنه این توابع برابر با R است ولی باید به این نکته توجه کنیم که رادیکاد موجود توی تابع در کجای تابع قرار داره . به عنوان نمونه :

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

همانطود که میبینید رادیکال در مخرج کسر قرار داره و دامنه این تابع $R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$ میشه یعنی:

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\xRightarrow{\text{دامنه تابع}}\sqrt[3]{x-1}=0\rightarrow x-1=0\rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\text{دامنهٔ تابع } y=D_{\mathrm{y}}=\mathrm{R}-\{1\}$$

حالا اگر تابعی شبیه $y=\sqrt[3]{x^2}$ یا هر تابع رادیکالی دیگری با فرجه فرد داشته باشیم که رادیکال در مخرج کسر نباشه دامنه این تابع برابر با R خواهد بود .

حالا بعد از این یادآوری بریم سراغ پاسخ مثال داده شده:

جواب مثال فوق : میدونیم که این تابع رادیکالی فرجه زوج داره و در مخرج هیچ کسری قرار نگرفته پس دامنه این تابع رو به صورت زیر محاسبه میکنیم :

$$y=\sqrt{x^2-2x-k}\xRightarrow{\text{دامنه تابع}}D_y=x^2-2x-k\geq 0$$

از روش دلتا استفاده میکنیم :

$$\Delta=b^2-4\mathrm{ac}\xRightarrow{\begin{cases}\mathrm{a}=1 & \text{ضریب } x^2\\ b=-2 & \text{ضریب } x\\ c=-k & \text{ثابت عدد}\end{cases}}\Delta=(-2)^2-4(1)(-\mathrm{k})=4+4\mathrm{k}\leq 0\xRightarrow{\text{چون ضریب } x^2 \text{ مثبت است پس دلتا منفی است}}4k\leq -4\rightarrow k\leq\frac{-4}{4}\rightarrow \boxed{k\leq -1}$$

پس به ازای $k\leq -1$ یا به عبارت دیگه به ازای $k\in(-\infty,1]$ تابع داده شده بر کل R پیوسته است .

نکته مهم

اصل این مبحث (پیوستگی) برای توابع دو یا چند ضابطه ای مورد استفاده قرار میگیره به اینصورت که در این نوع توابع باید به نقاط مرزی توابع توجه کنیم یعنی نقاطی که حد چپ و راست و مقدار تابع از ضابطه های مختلف به دست می آیند.

نکته مهم

در تستها معمولا برای ضابطه ها a و b میگذارند و حد برخی از ضابطه ها مبهم میشود و باید مقادیر مجهول a و b را محاسبه کنی که تابع داده شده یک تابع پیوسته شود .

به مثالهای زیر دقت کن :

مثال

اگر تابع زیر در نقطه ای به طول -1 پیوسته باشد $a\times b$ را بیابید؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & x>-1 \\ 3x-1 & x<-1 \\ \sqrt[3]{x}+b & x=-1 \end{cases}$$

جواب : میدونیم که تابعی پیوسته است که حد چپ و راست آن با هم و با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد.

پس داریم :

$$\underbrace{\lim_{x\to -1^-} f(x)}_{\text{حد چپ}} = \underbrace{\lim_{x\to -1^+} f(x)}_{\text{حد راست}} = \underbrace{f(-1)}_{x=-1 \text{ مقدار تابع در }}$$

حد راست با استفاده از ضابطه بالا $\rightarrow \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2+a = (-1)^2+a = 1+a$

حد چپ با استفاده از ضابطه میانی $\rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 3x-1 = 3(-1)-1 = -3-1 = -4$

مقدار تابع با استفاده از ضابطه پایین $\rightarrow f(-1) = \sqrt[3]{-1}+b = -1+b = b-1$

حالا باید برای بدست آوردن a و b از قانون پیوستگی استفاده کنیم. یعنی اول حد چپ و راست رو با هم برابر قرار بدیم بعد مقدار به دست آمده را با مقدار تابع در ۱- برابر قرار بدیم یعنی:

$$\underbrace{\lim_{x\to -1^-} f(x)}_{\text{حد چپ}} = \underbrace{\lim_{x\to -1^+} f(x)}_{\text{حد راست}} = \underbrace{f(-1)}_{x=-1 \text{ مقدار تابع در }} \rightarrow -4 = 1+a = b-1$$

$$1+a=-4 \rightarrow a=-4-1 \rightarrow a=-5$$

$$b-1=-4 \rightarrow b=-4+1 \rightarrow b=-3$$

در متن سوال از ما خواسته بود حاصل $a\times b$ رو محاسبه کنیم پس داریم : $a\times b \rightarrow (-5)\times(-3) = +15$

مثال تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{1-cosx}{xsinx} & x>0\\ a & x=0\\ \frac{e^x-1}{x} & x<0\end{cases}$ به ازای چه مقدار از a پیوسته است ؟

جواب : کالا مشخصه که حد راست با استفاده از ضابطه بالایی و حد چپ با استفاده از ضابطه پایینی و مقدار تابع با استفاده از ضابطه میانی محاسبه میشن . پس داریم :

$$\text{حد راست} \rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-cosx}{xsinx}$$

$$\xRightarrow{\text{با استفاده از هم ارزی}} 1-cosx \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{و} \quad sinx \sim x$$

حالا داریم :

$$\text{حد راست} \rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-cosx}{xsinx}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x\times x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2\times x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

برای حد چپ باید از قانون هوپیتال استفاده بشه که این قانون رو سال آینده با استفاده از مبحث مشتق میخونید من فقط یک شمای کلی از حد چپ این تابع به شما نشون میدم ولی قانون هوپیتال رو نمیگم.لطفا در پاسخ به این سوال خیلی کلی حد چپ رو فعلا بپذیر :

$$\text{حد چپ} \rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = \frac{0}{0}\ \text{مبهم} \xRightarrow{\text{با استفاده از قانون هوپیتال}} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-0}{1} = \lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$$

خب حالا به شرط پیوستگی برمیگردیم یعنی :

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} f(x)}_{\text{حد چپ}} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} f(x)}_{\text{حد راست}} = \underbrace{f(0)}_{x=0 \text{ مقدار تابع در}} \rightarrow 1 \neq \frac{1}{2} \neq a$$

چون a نمیتواند با 1 و $\frac{1}{2}$ مساوی باشد پس هیچ مقداری از a تابع داده شده را پیوسته نمیکند.

نکته مهم

اگر تابع $f(x)$ در $x = a$ حد نداشته باشد (یعنی حد چپ و راست این تابع در $x = a$ با هم برابر نباشند) آنگاه هیچ انتخابی برای $f(a)$ تابع را پیوسته نمیکند چون پیوستگی های یکطرفه (یعنی چه تابع از راست پیوسته باشد یا به عبارتی

$$\underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x)}_{\text{حد راست}} = \underbrace{f(a)}_{x=a \text{ مقدار تابع در }}$$

و یا از چپ پیوسته باشد یا به عبارتی

$$\underbrace{\lim_{x \to a^-} f(x)}_{\text{حد چپ}} = \underbrace{f(a)}_{x=a \text{ مقدار تابع در }}$$

تابع را پیوسته نمیکند.بهتره بگیم پیوستگی یکطرفه نشان دهنده پیوستگی کل تابع نیست و در اصل برای پیوستگی یک تابع پیوستگی دو طرفه معنا دارد و حتما باید شرط پیوستگی برقرار باشد .